ତୃତୀୟ ଅଧ୍ୟାୟ

ଘାତରାଶି ଓ ଲଗାରିଦମ୍
(EXPONENTIAL NUMBERS & LOGARITHM)

3.1. ଘାତ ରାଶି (Exponential Numbers) :

ଘାତ ରାଶି ଏବଂ ତତ୍ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀରେ ଆଲୋଚିତ ହୋଇଛି। 'a' ଗୋଟିଏ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଓ 'n' ଗୋଟିଏ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ n ସଂଖ୍ୟକ a ର ଗୁଣଫଳକୁ ସଂକ୍ଷେପରେ a^n କୁହାଯାଏ। a^n ଗୋଟିଏ ଘାତ ରାଶି (Exponential number) ଓ ଏହାକୁ a ର n ତମ ଘାତ (n-th power of a) କୁହାଯାଏ। a ଏହାର ଆଧାର (base) ଓ n ଘାତାଙ୍କ (Index ବା Exponent) ଅଟେ।

ଫରାସୀ ଗଣିତଜ୍ଞ ଓ ଦାର୍ଶନିକ ରେନେ ଡେକାର୍ଟେ (Rene Descartes) (1596-1650) ଘାତରାଶିର ସାଙ୍କେତିକ ରୂପ x^n ସମ୍ବନ୍ଧରେ ସୂଚନା ଦେଇଥିଲେ। ପ୍ରାରମ୍ଭିକ ସ୍ତରରେ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ଘାତାଙ୍କ ରୂପେ ନେଇ ଘାତ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଆରମ୍ଭ ହୋଇଥିଲା ଓ ପରବର୍ତ୍ତୀ ସମୟରେ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା, ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଓ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଘାତ ରାଶିର ଆଲୋଚନାରୁ ଘାତତତ୍ତ୍ୱର ବିକାଶ ହେଲା। ଘାତତତ୍ତ୍ୱର ପ୍ରସାରରେ ଇଂରେଜ ଗଣିତଜ୍ଞ ଜନ୍ ୱାଲିସ୍ (John Wallis) (1616-1703) ଓ ଆଇଜାକ୍ ନିଉଟନ୍ (Isac Newton) (1642-1727)ଙ୍କ ନାମ ଉଲ୍ଲେଖଯୋଗ୍ୟ।

ଆମର ଦୈନନ୍ଦିନ ହିସାବପତ୍ର, ବୈଜ୍ଞାନିକ ଗଣନା ଓ ଜ୍ୟୋତିର୍ବିଜ୍ଞାନ ଆଦିରେ ଘାତ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ବହୁଳ ପ୍ରୟୋଗ ହୋଇଥାଏ। ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ଓ ଘନଫଳର ହିସାବରେ ଆମେ ଯଥାକ୍ରମେ ଦ୍ୱିତୀୟ ଓ ତୃତୀୟ ଘାତର ପ୍ରୟୋଗ କରିଥାଉ। ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ a ହେଲେ - ବର୍ଗକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ a^2, ସମଘନର ଘନଫଳ a^3; ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ଦୈର୍ଘ୍ୟ r ହେଲେ ବୃତ୍ତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ πr^2, ଗୋଲକର ଘନଫଳ $\frac{4}{3}\pi r^3$ ହୁଏ। ସେହିପରି ସୂର୍ଯ୍ୟର ବସ୍ତୁତ୍ୱକୁ ଘାତ ଜରିଆରେ 1.983×10^{30} ଗ୍ରାମ୍ ଲେଖାଯାଇଥାଏ।

ଘାତାଙ୍କ n ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ ଘାତ ପ୍ରକ୍ରିୟା ପାଟୀଗଣିତ (arithmetic)ର ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଅନ୍ତର୍ଗତ, ମାତ୍ର ଘାତାଙ୍କ ଯେତେବେଳେ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ପରିସର ବାହାରକୁ ଚାଲିଯାଇ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ବା ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ବା ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ, ଘାତ ପ୍ରକ୍ରିୟା ସେତେବେଳେ ପ୍ରାଥମିକ ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାରେ ସୀମିତ ନ ରହି ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପରିଚୟ ଲାଭ କରେ। ଘାତରାଶିର ପରିଚୟ ପାଇଁ ଘାତାଙ୍କ ନିୟମ (Laws of indices)କୁ ଅକ୍ଷୁର୍ଣ୍ଣ ରଖି ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସଂଜ୍ଞା ନିରୂପଣ କରାଯାଏ।

3.2. ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା-ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଘାତରାଶି :

ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ତୁମେ ଜାଣିଛ ଯେ ଏକା ସଂଖ୍ୟା ବାରମ୍ବାର ଗୁଣାଯାଇଥିଲେ, ତାହାକୁ ସଂକ୍ଷେପରେ ଲେଖିବା ପାଇଁ ଘାତାଙ୍କ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଇଥାଏ।

ଯଥା - $2 \times 2 \times 2 = 2^3$, ଏଠାରେ 2କୁ ଆଧାର ଏବଂ 3କୁ ଘାତାଙ୍କ କୁହାଯାଏ।

ସେହିପରି $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^4$, $(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) = (-3)^5$;

$$\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}\right)^4 \text{ ଏବଂ } 3.14 \times 3.14 \times 3.14 \times 3.14 = (3.14)^4$$

ଉପରୋକ୍ତ ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକରେ ଆମେ ଆଧାରକୁ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା (ଅର୍ଥାତ୍ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା, ଭଗ୍ନ ସଂଖ୍ୟା, ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ପ୍ରଭୃତି) ନେଇଛେ। କିନ୍ତୁ ଘାତାଙ୍କକୁ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ନିଆଯାଇଛି। ଅର୍ଥାତ୍ x ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ n ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ $x \,.\, x \,.\, x \,.\, x ......x$ (n ସଂଖ୍ୟକ xର ଗୁଣଫଳ) $= x^n$

ଘାତାଙ୍କ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଘାତାଙ୍କ ନିୟମଗୁଡ଼ିକ ସତ୍ୟ।

ନିୟମ : ଉପପାଦ୍ୟ – 1 :

(i) $x^m \times x^n = x^{m+n}$ (ii) $(x^m)^n = x^{mn}$ (iii) $(xy)^n = x^n \,.\, y^n$

(iv) $x^m \div x^n = x^{m-n}$ (ଏଠାରେ $m > n$) (v) $\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m} (y \neq 0)$

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଗୋଟିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଆଧାର ପାଇଁ ଘାତାଙ୍କ ବଦଳିଲେ ଘାତରାଶିର ମୂଲ୍ୟଟି ବଦଳିଯାଏ। କିନ୍ତୁ ଆଧାର 0 କିମ୍ବା 1 ସ୍ଥଳରେ ଭିନ୍ନ ଘାତାଙ୍କ ପାଇଁ ମୂଲ୍ୟରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ ହୁଏ ନାହିଁ। ଯଥା :–

$$0^2 = 0^3 = 0^5 = ... = 0;\ 1 = 1^2 = 1^3 = ... = 1$$

ତେଣୁ, ଆଧାର 0 ଓ 1 ପାଇଁ ଘାତାଙ୍କ ନିୟମଗୁଡ଼ିକ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ହେଲେ ମଧ୍ୟ ଏ ସ୍ଥଳରେ ଏହା ତାତ୍ପର୍ଯ୍ୟବିହୀନ।

3.3. ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଘାତରାଶି :

ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ Z କହିଲେ ତୁମେ ଜାଣ ଯେ, $Z = \{............, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,......\}$

ଏଥିରୁ ଆମେ 1, 2, 3....... ଆଦି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କୁ ଘାତାଙ୍କ ରୂପେ ବ୍ୟବହାର କରି ଘାତରାଶି ବିଷୟ ଆଲୋଚନା କରି ସାରିଛେ। ତେଣୁ ଆଧାର ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଘାତାଙ୍କ ଶୂନ ବା ଋଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ହେଲେ ଘାତରାଶିର ଅର୍ଥ କ'ଣ ହେବ ତାହା ହିଁ ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମର ଆଲୋଚନାର ବିଷୟ।

ଆଗରୁ ସୂଚନା ଦିଆଯାଇଛି ଯେ ଘାତାଙ୍କ n, ଶୂନ ବା ଋଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ହେଲେ ଘାତରାଶି ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପରିଚୟ ଦରକାର କରେ; କାରଣ (ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ) ପୂର୍ବଭଳି ଆମେ 2^0 ବା 2^{-3}କୁ ଯଥାକ୍ରମେ 0 ସଂଖ୍ୟକ ବା –3 ସଂଖ୍ୟକ 2ର ଗୁଣଫଳ ବୋଲି କହିପାରିବା ନାହିଁ। ଏପରି କହିବାର କିଛି ଅର୍ଥ ନାହିଁ।

ସେଥିପାଇଁ ନୂତନ ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ କରାଗଲା –

ସଂଜ୍ଞା : a ଏକ ଅଣଶୂନ୍ୟ ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟା ଏବଂ n ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଅର୍ଥାତ୍ $a \in R, a \neq 0$ ଏବଂ $n \in N$ ହେଲେ, (i) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (ii) $a^0 = 1$

[କହିବା ବାହୁଲ୍ୟ ଯେ ଉପରୋକ୍ତ ସଂଜ୍ଞା ତୁମେ ଆଗରୁ ଜାଣିଥିବା ଘାତାଙ୍କ ନିୟମକୁ ଅକ୍ଷୁର୍ଣ୍ଣ ରଖିବା ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ ଦ୍ୱାରା ଅନୁପ୍ରେରିତ]

ମନେରଖ : 0^0ର କୌଣସି ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ, ଏହା ଅର୍ଥହୀନ।

ଟୀକା : ସଂଜ୍ଞାନୁଯାୟୀ $n \in N$ ପାଇଁ $a^n \times a^{-n} = a^n \times \frac{1}{a^n} = 1 \ (\because a \neq 0)$

ତେଣୁ ଆମେ $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$; $a \neq 0, n \in N$ – ଏପରି ମଧ୍ୟ ଲେଖିପାରିବା।

ଉପରୋକ୍ତ ସଂଜ୍ଞା ସାହାଯ୍ୟରେ ଆମେ ଯେ କୌଣସି ଅଣଶୂନ୍ୟ ଆଧାର ଓ ଶୂନ ବା ରଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଘାତରାଶିର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା। ଯଥା–

$$2^0 = 1,\ 3^{-1} = \frac{1}{3},\ 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8},\ \left(\frac{3}{7}\right)^{-1} = \frac{1}{3/7} = \frac{7}{3},\ 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0.001,$$

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା (ସେଟ୍ Z ର ଉପାଦାନ) ଘାତାଙ୍କ ଥିଲେ ଘାତାଙ୍କ ନିୟମ ସଂପର୍କରେ ଆଲୋଚନା କରିବା। ରଣାତ୍ମକ ଓ ଶୂନ୍ୟ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଘାତରାଶିର ସଂଜ୍ଞାକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ ରଖି ଏ ସ୍ଥଳରେ ମଧ୍ୟ ଆଧାରକୁ ଅଣଶୂନ୍ୟ ନିଆଗଲା।

ଉପପାଦ୍ୟ – 2 :

ଯଦି a ଓ b ଉଭୟେ ଅଣଶୂନ୍ୟ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ m, n ଉଭୟେ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ତେବେ,

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iii) $(a\,b)^n = a^n \cdot b^n$ (iv) $a^m \div a^n = a^{m-n}$ (v) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$

ଏ ସମସ୍ତର ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରିବ। ମାତ୍ର ଆମେ କେବଳ ଗୋଟିକର ଯଥା- (i) ର ପ୍ରମାଣ କରିବା। କାରଣ ଏହି ନିୟମଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରୟୋଗ କିପରି ହେଉଛି ତାହା ଦେଖିବା ଆମର ମୂଳ ଲକ୍ଷ୍ୟ।

(i) (a) ମନେକର m = 0 ଓ n ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା।

$\therefore a^m \times a^n = a^0 \times a^n = 1 \times a^n = a^n = a^{0+n} = a^{m+n}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ସେହିପରି $m \in Z, n = 0$ ହେଲେ ଉପରୋକ୍ତ ଉପାୟରେ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରିବ ଯେ $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(b) ମନେକର $m > 0, n > 0$ ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ $m, n \in N$ ହେଉଥିବାରୁ ଗଣନସଂଖ୍ୟା ଘାତାଙ୍କ ନିୟମାନୁଯାୟୀ $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(c) ମନେକର $m < 0, n < 0$ । $m, n \in Z$ ହୋଇଥିବାରୁ ଆମେ ଲେଖିପାରିବା

$m = -p, n = -q;\ p, q \in N$

$\therefore a^m \times a^n = a^{-p} \times a^{-q} = \frac{1}{a^p} \times \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^{p+q}} = \frac{1}{a^{-(m+n)}} = a^{m+n}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

(d) ମନେକର $m > 0, n < 0$

$n \in Z, n < 0$ ହୋଇଥିବାରୁ ଆମେ ଲେଖିପାରିବା $n = -p, p \in N$

(i) ଯଦି $m > p$ ହୁଏ ତେବେ

$$a^m \times a^n = a^m \times a^{-p} = a^m \times \frac{1}{a^p} \text{ (ସଂଜ୍ଞା) } = \frac{a^m}{a^p} = a^{m-p} = a^{m+n}$$

(ii) ଯଦି $m < p$ ହୁଏ ତେବେ $a^m \times a^n = a^m \times a^{-p}$

$$= \frac{a^m}{a^p} = \frac{a^m}{a^{m+p-m}} = \frac{a^m}{a^m \times a^{p-m}} = \frac{1}{a^{p-m}} = a^{m-p} = a^{m+n}$$

(iii) $m = p$ ହେଲେ $n = -p = -m$, ଅର୍ଥାତ୍ $m + n = 0$

$$\therefore a^m \times a^n = a^m \times a^{-m} = a^m \times \frac{1}{a^m} = 1 = a^0 \text{ (ସଂଜ୍ଞା) } = a^{m+n}$$

ତେଣୁ $m > 0, n < 0$ ହେଲେ $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉପରୋକ୍ତ ଢାଞ୍ଚାରେ $m < 0$ ଓ $n > 0$ ପାଇଁ ମଧ୍ୟ ଆମେ ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବା ଯେ $a^m \times a^n = a^{m+n}$

ତେଣୁ ସମସ୍ତ ପରିସ୍ଥିତିରେ ଆମେ ଦେଖିଲେ ଯେ a ଏକ ଅଣଶୂନ୍ୟ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ m, n ଉଭୟେ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ହେଲେ $a^m \times a^n = a^{m+n}$।

ଉଦାହରଣ - 1 :

(i) 4ଟି $\frac{1}{9}$ ର ଗୁଣଫଳ $= 9^{-4}$ (ii) 3ଟି aର ଗୁଣଫଳକୁ $\frac{1}{a}$ ର ଘାତରୂପେ ପ୍ରକାଶ କର।

ସମାଧାନ :

(i) 4ଟି $\frac{1}{9}$ ର ଗୁଣଫଳ $= \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{9^4} = 9^{-4}$ (ଉତ୍ତର)

(ii) 3ଟି aର ଗୁଣଫଳ $= a \times a \times a = a^3 = a^{-1\times-3} = (a^{-1})^{-3} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-3}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 2 :

ଋଣାତ୍ମକ ଘାତାଙ୍କବିଶିଷ୍ଟ ଘାତରାଶିରେ ପ୍ରକାଶ କର : (i) 0.0026, (ii) 0.000105

ସମାଧାନ :

(i) $0.0026 = \frac{26}{10000} = \frac{26}{10^4} = 26 \times 10^{-4}$ (ଉତ୍ତର)

(ii) $0.000105 = \frac{105}{1000000} = \frac{105}{10^6} = 105 \times 10^{-6}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 3 :

ଏକ ଆଧାର ଓ ଏକ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ପଦରେ ପ୍ରକାଶ କର :

(i) $7^5 \times 7^9$ (ii) $(4^5)^3$ (iii) $3^5 \times 4^5$

(iv) $\frac{2^5}{4^3}$ (v) $p \times p^3 \times p^5$ (vi) $\left(-\frac{a}{b}\right)^5 \times \left(-\frac{a}{b}\right)^7 ; (b \neq 0)$

ସମାଧାନ :

(i) $7^5 \times 7^9 = 7^{5+9} = 7^{14}$

(ii) $(4^5)^3 = 4^{5\times3} = 4^{15}$

(iii) $3^5 \times 4^5 = (3 \times 4)^5 = 12^5$

(iv) $\frac{2^5}{4^3} = \frac{2^5}{(2^2)^3} = \frac{2^5}{2^6} = 2^{5-6} = 2^{-1}$

(v) $p \times p^3 \times p^5 = p^{1+3+5} = p^9$

(vi) $\left(-\frac{a}{b}\right)^5 \times \left(-\frac{a}{b}\right)^7 = \left\{(-1) \times \frac{a}{b}\right\}^5 \times \left\{(-1) \times \frac{a}{b}\right\}^7 = (-1)^5 \times \left(\frac{a}{b}\right)^5 \times (-1)^7 \times \left(\frac{a}{b}\right)^7$

$= (-1)^{5+7} \times \left(\frac{a}{b}\right)^{5+7} = (-1)^{12} \times \left(\frac{a}{b}\right)^{12} = \left(\frac{a}{b}\right)^{12}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 4 :

ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ଆଧାର ବିଶିଷ୍ଟ ଘାତରାଶିମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କର :

(i) 12^5 (ii) 686^{-3} (iii) $\frac{121 \times 12^3}{70^2}$

ସମାଧାନ :

(i) $12^5 = (2^2 \times 3)^5 = (2^2)^5 \times 3^5 = 2^{10} \times 3^5$ (ଉତ୍ତର)

(ii) $686^{-3} = (2 \times 7^3)^{-3} = 2^{-3} \times (7^3)^{-3} = 2^{-3} \times 7^{-9}$ (ଉତ୍ତର)

(iii) $\frac{121 \times 12^3}{70^2} = \frac{11^2 \times (2^2 \times 3)^3}{(2 \times 5 \times 7)^2} = 11^2 \times (2^2 \times 3)^3 \times (2 \times 5 \times 7)^{-2}$

$= 11^2 \times 2^6 \times 3^3 \times 2^{-2} \times 5^{-2} \times 7^{-2} = 2^{6-2} \times 3^3 \times 5^{-2} \times 7^{-2} \times 11^2$

$= 2^4 \times 3^3 \times 5^{-2} \times 7^{-2} \times 11^2$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 5 : ସରଳ କର :

(i) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{5}{3}\right)^{-2} \div \left(\frac{8}{5}\right)^{-1}$ (ii) $a^3 \div a^5 \times a^4 \ (a \neq 0)$ (ii) $2^{2^3} \div (2^2)^3$

ସମାଧାନ :

(i) ଦତ୍ତ ରାଶି $= \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^3} \times \frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)^2} \div \frac{1}{\frac{8}{5}} = \frac{1}{\frac{2^3}{5^3}} \times \frac{1}{\frac{5^2}{3^2}} \div \frac{1}{\frac{8}{5}}$

$= \frac{125}{8} \times \frac{9}{25} \div \frac{5}{8} = \frac{125}{8} \times \frac{9}{25} \times \frac{8}{5} = 9$ (ଉତ୍ତର)

(ii) $a^3 \div a^5 \times a^4 = a^{3-5} \times a^4 = a^{-2} \times a^4 = a^{-2+4} = a^2$ (ଉତ୍ତର)

(iii) $2^{2^3} \div (2^2)^3 = 2^8 \div 2^{2\times3} = 2^{8-6} = 2^2 = 4$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 6 : ସରଳ କର : $\dfrac{2^{m+1}\cdot 3^{2m-1}\cdot 5^{m+n}\cdot 6^n}{15^m\cdot 10^{n+2}\cdot 6^m\cdot 3^{n-1}}$; m, n $\in$ Z

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ରାଶି $= \dfrac{2^{m+1}\cdot 3^{2m-1}\cdot 5^{m+n}\cdot (2\times3)^n}{(3\times5)^m\cdot(2\times5)^{n+2}\cdot(2\times3)^m\cdot 3^{n-1}} = \dfrac{2^{m+1}\cdot 3^{2m-1}\cdot 5^{m+n}\cdot 2^n\cdot 3^n}{3^m\cdot 5^m\cdot 2^{n+2}\cdot 5^{n+2}\cdot 2^m\cdot 3^m\cdot 3^{n-1}}$

$= \dfrac{2^{m+n+1}\cdot 3^{2m+n-1}\cdot 5^{m+n}}{2^{m+n+2}\cdot 3^{2m+n-1}\cdot 5^{m+n+2}} = 2^{(m+n+1)-(m+n+2)} \times 3^0 \times 5^{(m+n)-(m+n+2)}$

$= 2^{-1} \times 1 \times 5^{-2} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{5^2} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{25} = \dfrac{1}{50}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 7 : ସରଳ କର : $\left(\dfrac{a^l}{a^m}\right)^{l^2+lm+m^2} \times \left(\dfrac{a^m}{a^n}\right)^{m^2+mn+n^2} \times \left(\dfrac{a^n}{a^l}\right)^{n^2+nl+l^2}$

[a $\in$ R, a $\neq$ 0; l, m, n $\in$ Z]

ସମାଧାନ :

ଦତ୍ତରାଶି $= (a^{l-m})^{l^2+lm+m^2} \times (a^{m-n})^{m^2+mn+n^2} \times (a^{n-l})^{n^2+nl+l^2}$

$= a^{(l-m)\times(l^2+lm+m^2)} \times a^{(m-n)\times(m^2+mn+n^2)} \times a^{(n-l)(n^2+nl+l^2)}$

$= a^{l^3-m^3} \times a^{m^3-n^3} \times a^{n^3-l^3} = a^{l^3-m^3+m^3-n^3+n^3-l^3} = a^0 = 1$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 8 : $2^6 \times 9^3 \times 216 = 6^a$ ହେଲେ a ର ମାନ କେତେ ?

ସମାଧାନ :

$2^6 \times 9^3 \times 216 = 2^6 \times (3^2)^3 \times 6^3 = 2^6 \times 3^6 \times 6^3$

$= (2 \times 3)^6 \times 6^3 = 6^6 \times 6^3 = 6^9$

$\therefore$ ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ $6^9 = 6^a \Rightarrow a = 9$ (ଉତ୍ତର)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : $a > 0, a \neq 1$ ଏବଂ $m, n \in Z$ ହେଲେ $a^m = a^n \Rightarrow m = n$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3(a)

1. ଗୁଣଫଳକୁ ଘାତରାଶି ଆକାରରେ ପ୍ରକାଶ କର।

(i) $\dfrac{3}{2}\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{3}{2}$, (ii) $\left(-\dfrac{3}{5}\right)\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)$, (iii) $0.01 \times 0.01 \times 0.01 \times 0.01$

(iv) $0.5 \times 0.5 \times \ldots\ldots \times 0.5$ (100 ଥର), (v) $\dfrac{1}{3.7}\times\dfrac{1}{3.7}\times\ldots\ldots\times\dfrac{1}{3.7}$ (m ଥର)

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତି ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଗୁଡ଼ିକ ଠିକ୍ ଉକ୍ତି ଏବଂ କେଉଁଗୁଡ଼ିକ ଭୁଲ ଉକ୍ତି ଚିହ୍ନାଅ।

(i) $2^3 \times 2^7 = 2^{10}$, (ii) $2^3 \times 3^7 = 5^{10}$, (iii) $2^3 \times 3^2 = 6^5$, (iv) $(3^3)^2 = 3^5$

(v) $(7^m)^2 = 7^{2m}$, (vi) $3^5 \times 4^5 = 12^5$, (vii) $3^7 \times 3^{-7} = 1$, (vii) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$

(ix) $(-2)^5 \times (-2)^{-3} = (-2)^8$, (x) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{-4} = \left(\frac{1}{15}\right)^{-4}$, (xi) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-3} = \frac{1}{343}$

(xii) $10^a \times 10^2 = 10^{2a}$, (xiii) $10^{2n} = 10^{2^n}$, (xiv) $(a^2)^3 = a^{2^3}$, (xv) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} \times \frac{a}{b} = 1$

3. କୋଠରୀ ମଧ୍ୟରେ ଉପଯୁକ୍ତ ସଂଖ୍ୟା ଲେଖ।

(i) $3^5 \times 3^3 = 3^{\square}$ (ii) $(6^2)^{\square} = 6^{-8}$ (iii) $8^{-3} \times 8^{-2} = 8^{\square}$

(iv) $2^{-3} \times 3^{-3} = 6^{\square}$ (v) $\frac{x^2}{x^5} = x^{\square}$, $x \neq 0$ (vi) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\square} = \frac{27}{\square}$

4. ଋଣାତ୍ମକ ଘାତାଙ୍କ ଅପସାରଣ କର।

(i) 6^{-4}, (ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$, (iii) $\frac{1}{8^{-3}}$, (iv) $\frac{1}{x^{-10}}$, $x \neq 0$, (v) $2c^{-m}$, $(c \neq 0, m > 0)$

5. (a) ବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରୁ ଉପଯୁକ୍ତ ଉତ୍ତର ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର।

3^{-4} = ——

[–(3ର ଚତୁର୍ଥ ଘାତ), (–3)ର ଚତୁର୍ଥ ଘାତ, –4 ସଂଖ୍ୟକ 3ର ଗୁଣଫଳ, 4ଟି ର $\frac{1}{3}$ ଗୁଣଫଳ]

(b) ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ସମୀକରଣ ଓ କେଉଁଟି ଅଭେଦ ତାହା ଦର୍ଶାଅ।

[$(xy)^2 = x^2y^2$, $(x+y)^2 = x^2 + y^2$, $(x-y)^2 = x^2 - y^2$, $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$]

6. $\left(-\frac{2}{3}\right)^a = \frac{16}{81}$ ହେଲେ aର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

7. a^x ଆକାରରେ ପ୍ରକାଶ କର। (ଆବଶ୍ୟକ ସ୍ଥଳେ ମୂଳଚିହ୍ନ ଅପସାରଣ କର)

(i) $3^{-2} \times 4^{-2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$ (ii) $3^5 \times 4^5$ (iii) $\left(\sqrt{3}\right)^6 \times \left(\sqrt{3}\right)^{-12}$

(iv) $(4^{-4})^4 \times \left\{\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}\right\}^{-4}$ (v) $8^{-3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \times (0.25)^{-3}$

(vi) $\left(\frac{3}{4}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-m} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{3m}$ (vii) $\frac{a}{b} \times \left(\frac{a}{b}\right)^3 \times \left(-\frac{a}{b}\right)^{-2}$ $(a \neq 0, b \neq 0)$

(viii) $\left(\frac{2}{3}\right)^8 \times \frac{32}{243} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{9}$, (ix) $\left(\frac{3}{2}\right)^9 \times \left(-\frac{2}{5}\right)^9$, (x) $8^{-3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \times (0.125)^{-3}$

8. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $2^{-2} \times 5^{-2}$, (ii) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$, (iii) $\frac{1}{2^{-4} \times 3^{-2} \times 5^{-1}}$, (iv) $\left(\frac{p}{q}\right)^{-1}$ ଯଦି $p = 2$ ଓ $q = 3$.

(v) $(0.25)^3 \times 4^3$, (vi) $(0.125)^{-7} \times 8^{-7}$, (vii) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$

9. ସରଳ କର :

(i) $8^{-3} \div 16^{-2}$ (ii) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-7} \div \left(\frac{4}{9}\right)^{-3}$ (iii) $27^{-5} \times 9^{-3} \div 81^{-5}$

(iv) $\frac{12^{-4} \times 18^{-2}}{24^{-6}}$ (v) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} \times 5^{-2} \div 2^{-5}$ (vi) $\frac{2^{-4}}{3^{-2}} + \frac{4^{-2}}{9^{-1}} \times \frac{1}{10^{-2}}$

(vii) $\frac{4^{3-m} \times 8^{2m-1}}{16^{m+2}}, m \in Z$ (viii) $\frac{2^{m+1} \times 3^{3m-2} \times 12^m}{9^{2m} \times 8^m}, m \in Z$

10. (i) କେଉଁ ଆଧାରର ତୃତୀୟ ଘାତ $\frac{1}{0.216}$ ହେବ ?

(ii) 2^{-3} ଓ $(-3)^2$ ମଧ୍ୟରେ

(a) କାହାର ଆଧାର ବଡ଼ ? (b) କାହାର ଘାତାଙ୍କ ବଡ଼ ? (c) କେଉଁ ରାଶିଟି ବଡ଼ ?

(iii) ଦୁଇଟି ରାଶିର ଗୁଣଫଳ 4^7; ଗୋଟିଏ ରାଶି 4^{-3} ହେଲେ ଅନ୍ୟ ରାଶିଟିକୁ 2 ଆଧାର ବିଶିଷ୍ଟ ଘାତରାଶିରୂପେ ପ୍ରକାଶ କର।

(iv) 10^{-3}କୁ କେଉଁ ଘାତରାଶିଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ଭାଗଫଳ 2^{-3} ହେବ ?

(v) କେଉଁ କ୍ଷେତ୍ରରେ y ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ହେବ ?

(a) $16^3 \times 8^2 = 16^y$ (b) $16^3 \times 8^2 = 8^y$

11. ସରଳ କର।

(i) $\frac{4^{3n-1} \times 9^{3n+2} \times 125^{2n}}{8^{2n} \times 27^{2n-1} \times 25^{3n}}, n \in Z$ (ii) $\frac{10^{3m-1} \times 25^{m+2} \times 8^{m-1}}{20^{2m-1} \times 4^m \times 125^{m-1}}, m \in Z$

(iii) $(a^l)^{m-n} \times (a^m)^{n-l} \times (a^n)^{l-m}$ [$a \in R, a \neq 0, l, m, n \in Z$]

(iv) $\left(\frac{a^p}{a^q}\right)^{p+q} \times \left(\frac{a^q}{a^r}\right)^{q+r} \times \left(\frac{a^r}{a^p}\right)^{r+p}$ [$a \in R, a \neq 0, p, q, r \in Z$]

12. $x \in R, x \neq 0, a, b, c \in Z$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

(i) $\frac{1}{1+x^{b-a}+x^{c-a}} + \frac{1}{1+x^{c-b}+x^{a-b}} + \frac{1}{1+x^{a-c}+x^{b-c}} = 1$

(ii) $\frac{1}{1+x^{a-b}+x^{a-c}} + \frac{1}{1+x^{b-c}+x^{b-a}} + \frac{1}{1+x^{c-a}+x^{c-b}} = 1$ (iii) $\left(\frac{x^b}{x^c}\right)^a \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^b \times \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^c = 1$

13.(i) ଯଦି $a = xy^{p-1}$, $b = xy^{q-1}$, $c = xy^{r-1}$ ହୁଏ [$x, y \in R, x \neq 0, y \neq 0$ ଓ $p, q, r \in Z$] ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $a^{q-r} \times b^{r-p} \times c^{p-q} = 1$

(ii) ଯଦି $a = x^p y^{q+r}$, $b = x^q y^{r+p}$, $c = x^r y^{p+q}$ ହୁଏ ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $a^{q-r} . b^{r-p} . c^{p-q} = 1$. [$x, y \in R, x \neq 0, y \neq 0$ ଓ $p, q, r \in Z$]

14. [$x \in R, x \neq 0$ ଓ $m, n, p \in Z$] ହେଲେ ନିମ୍ନ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $\left(\dfrac{x^{p^2+m^2}}{x^{-pm}}\right)^{p-m} \times \left(\dfrac{x^{m^2+n^2}}{x^{-mn}}\right)^{m-n} \times \left(\dfrac{x^{n^2+p^2}}{x^{-np}}\right)^{n-p}$

(ii) $\left(\dfrac{x^{p^2+m^2}}{x^{pm}}\right)^{p+m} \times \left(\dfrac{x^{m^2+n^2}}{x^{mn}}\right)^{m+n} \times \left(\dfrac{x^{n^2+p^2}}{x^{np}}\right)^{n+p}$

15. $9 \times 5^2 \times 225 = 15^x$ ହେଲେ x ର ମାନ କେତେ ?

3.4. ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଘାତରାଶି :

ଏ ବିଷୟରେ କିଛି ଆଲୋଚନା କରିବା ପୂର୍ବରୁ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ R ର ଗୋଟିଏ ଧର୍ମ ସଂପର୍କରେ ଜାଣିବା ଆବଶ୍ୟକ। ତାହା ହେଲା - a ଗୋଟିଏ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ n ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ a ଓ n ର ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ମାନ ପାଇଁ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା $x > 0$ ରହିବ, ଯେପରିକି $x^n = a$ ହେବ।

ଉପରୋକ୍ତ ଉକ୍ତି ସଂପର୍କରେ ଉଚ୍ଚତର ଗଣିତରେ ବିଶେଷ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି। ଆବଶ୍ୟକତା ଦୃଷ୍ଟିରୁ ଏହାର ଉଲ୍ଲେଖ ମାତ୍ର କରାଗଲା। ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ର ଉପରୋକ୍ତ ଧର୍ମ, ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ଦେଖାଯାଏ ନାହିଁ। ଏହା ତୁମେ $x^2 = 2$ ସମୀକରଣରୁ ବୁଝି ପାରିବ। ଏହି ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ନାହିଁ - ଏକଥା ଆଗରୁ ଜାଣିଛ।

$x^n = a$ ହେଲେ ଆମେ x କୁ a ର ଗୋଟିଏ n ତମ ମୂଳ (n-th root) ବୋଲି କହୁ। ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ର ଉଲ୍ଲିଖିତ ଧର୍ମ ଦୃଷ୍ଟିରୁ ଯେ କୌଣସି ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା a ର ଏକ n ତମ ମୂଳ ରୂପେ ($n \in N$) ଆମେ ନିଶ୍ଚୟ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ପାଇପାରିବା ଓ a ର ଏହି ଧନାତ୍ମକ n-ତମ ମୂଳକୁ $\sqrt[n]{a}$ ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରିବା। ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ $2^2 = 4$ ଓ $(-2)^2 = 4$ ହେଉଥିବାରୁ 4 ର ଦୁଇଟି ବର୍ଗମୂଳ 2 ଓ -2 ଅଛନ୍ତି। ମାତ୍ର କେବଳ ଧନାତ୍ମକ ବର୍ଗମୂଳ 2 କୁ ହିଁ $\sqrt{4}$ ବୋଲି ଲେଖାଯାଏ ଓ ଋଣାତ୍ମକ ବର୍ଗମୂଳ -2 କୁ $-\sqrt{4}$ ବୋଲି ଲେଖାଯାଏ।

ଘାତାଙ୍କକୁ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନେଇ ଆମେ ବର୍ତ୍ତମାନ ଘାତରାଶିର ଅର୍ଥ ନିରୂପଣ କରିବା। n ଗୋଟିଏ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ ଆମେ ଲେଖିପାରିବା –

$n = \dfrac{p}{q}$ ଯେଉଁଠାରେ p ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଓ q ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା।

ସଂଜ୍ଞା : a ଏକ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ p ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ଓ q ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ, ଅର୍ଥାତ୍ $a \in R^+$, $p \in Z$, $q \in N$ ହେଲେ $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.

ଟୀକା : (i) ଉପରୋକ୍ତ ସଂଜ୍ଞାକୁ ନିମ୍ନଲିଖିତରୂପେ ମଧ୍ୟ ନିଆଯାଇପାରିବ – $a^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$

[ପର୍ଯ୍ୟାୟକ୍ରମେ $p = 0$, $p > 0$ ଓ $p < 0$ ନେଇ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\left(\sqrt[q]{a}\right)^p = \sqrt[q]{a^p}$]

(ii) $a > 0$ ଓ n ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ $a^{\frac{1}{n}}$ ର ଅର୍ଥ ସଂଜ୍ଞାନୁଯାୟୀ କେବଳ $\sqrt[n]{a}$ ଅର୍ଥାତ୍ a ର ଧନାତ୍ମକ n-ତମ ମୂଳକୁ ହିଁ ବୁଝିବା। ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ $4^{\frac{1}{2}}$ ର ଅର୍ଥ ହେଉଛି $\sqrt{4}$ ଅର୍ଥାତ୍ 2; -2 ନୁହେଁ। ଅବଶ୍ୟ ଘାତରାଶି ମାଧ୍ୟମରେ 4ର ବର୍ଗମୂଳ ଦୁଇଟିକୁ ପ୍ରକାଶ କରିବାକୁ ଯାଇ ଆମେ ସେମାନଙ୍କୁ $4^{\frac{1}{2}}$ ଓ $-4^{\frac{1}{2}}$ ବୋଲି ଉଲ୍ଲେଖ କରିପାରିବା।

ଦିଆଯାଇଥିବା ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରୟୋଗ କରି ଆମେ ଧନାତ୍ମକ ଆଧାର ଓ ଯେ କୌଣସି ପରିମେୟ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଘାତ ରାଶିର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା। ଯଥା–

(i) $4^{-\frac{5}{2}} = \left(\sqrt{4}\right)^{-5} = 2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$ (ii) $343^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{7^3} = 7$

(iii) $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{\frac{8}{27}}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

(iv) $1024^{1.2} = 1024^{\frac{12}{10}} = \left(\sqrt[10]{1024}\right)^{12} = \left(\sqrt[10]{2^{10}}\right)^{12} = 2^{12} = 4096$

[$1024 = 2^{10}$ ହୋଇଥିବାରୁ $\sqrt[10]{1024}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ସହଜ ହେଲା। ସାଧାରଣ ଭାବେ ଯେ କୌଣସି ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟାର n-ତମ ମୂଳ ($n \in N$) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାର ପ୍ରଣାଳୀ ପରବର୍ତ୍ତୀ ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆଲୋଚିତ ହେବ।]

ମନ୍ତବ୍ୟ : $a > 0$ ଓ n ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ ସଂଜ୍ଞାନୁଯାୟୀ $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ମାତ୍ର $x^n = a$ ସମୀକରଣକୁ $a = 0$ ଓ $a < 0$ ପାଇଁ ଅନୁଶୀଳନ କଲେ ଆମେ $a \leq 0$ ଓ $n \in N$ ପାଇଁ କେଉଁ ପରିସ୍ଥିତିରେ $a^{\frac{1}{n}}$ ଗୋଟିଏ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାକୁ ବୁଝାଇବ ତାହା ଜାଣିପାରିବା।

0 (ଶୂନ) ହେଉଛି ଏକମାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା ଯାହାର n-ତମ ଘାତ nର ଯେକୌଣସି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା-ମାନ ପାଇଁ 0 ଅଟେ। ($0^n = 0$) ତେଣୁ $x^n = 0$ ସମୀକରଣ କେବଳ ମାତ୍ର $x = 0$ ଦ୍ୱାରା ସିଦ୍ଧ ହୁଏ; ଅର୍ଥାତ୍ 0ର nତମ ମୂଳ ($n \in N$) କେବଳ 0 ଅଟେ। ସେହି କାରଣରୁ ଆମେ $0^{\frac{1}{n}}$ ଓ $0^{\frac{m}{n}}$ ଯେଉଁଠାରେ m ଓ n ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ ନିମ୍ନମତେ ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ କରି ପାରିବା।

ସଂଜ୍ଞା : $0^{\frac{1}{n}} = 0$, n ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା; $0^{\frac{m}{n}} = 0$, m ଓ n ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା।

$x^n = a$ ସମୀକରଣରେ $a < 0$ ହେଲେ, nର ଯେକୌଣସି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ମାନ ପାଇଁ x ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ହେବ ବୋଲି ଆମେ କହି ପାରିବା ନାହିଁ। ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ $a = -1$ ଓ $n = 2$ ହେଲେ $x^2 = -1$ ସମୀକରଣରେ x ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ହେବ ନାହିଁ; କାରଣ କୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗ ଋଣାତ୍ମକ ନୁହେଁ। n ଯଦି ଏକ ଯୁଗ୍ମ

ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ ତେବେ xର ଯେକୌଣସି ବାସ୍ତବ ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ x^n ଋଣାତ୍ମକ ନୁହେଁ; ଅର୍ଥାତ୍ ଋଣାତ୍ମକ a ଓ ଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା n ପାଇଁ $x^n = a$ ସମୀକରଣର କୌଣସି ବାସ୍ତବ ମୂଳ ନାହିଁ। ତେଣୁ –

n ଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଓ $a < 0$ ହେଲେ $a^{\frac{1}{n}}$ କୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାକୁ ବୁଝାଏ ନାହିଁ।

ମାତ୍ର ଯଦି n ଏକ ଅଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା (ଅର୍ଥାତ୍ 3) ଓ $a < 0$ (ଅର୍ଥାତ୍ -8) ହୁଏ ତେବେ a ର ଏକମାତ୍ର ବାସ୍ତବ n-ତମ ମୂଳ $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$ ଅଟେ। ପୁନଶ୍ଚ ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ

$$(-27)^{\frac{1}{3}} = -\sqrt[3]{27} = -3,\ (-8)^{\frac{5}{3}} = \left\{(-8)^{\frac{1}{3}}\right\}^5 = (-2)^5 = -32$$

ମନେରଖ : **$a^{\frac{1}{n}}$, $n \in N$ ଓ $a \le 0$ ପାଇଁ ସ୍ଥଳବିଶେଷରେ ସଂଜ୍ଞାବଦ୍ଧ ହୋଇ ପାରୁଥିଲେ ମଧ୍ୟ ପରିମେୟ-ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଘାତରାଶିର ସଂଜ୍ଞା ସାଧାରଣ ଭାବେ ଧନାତ୍ମକ ଆଧାର ପାଇଁ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ହୋଇଥାଏ।**

ଉପପାଦ୍ୟ – **3 :**

a ଓ b ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ m, n ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ,

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iii) $(a.b)^m = a^m \, . \, b^m$ (iv) $a^m \div a^n = a^{m-n}$

ଏ ସମସ୍ତ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରିବ। ମାତ୍ର ପୂର୍ବବତ୍ ଏଠାରେ ଆମେ କେବଳ (i)ର ପ୍ରମାଣ କରିବା।

ପ୍ରମାଣ **:**

(i) m ଓ n ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେତୁ ଆମେ ଲେଖିପାରିବା –

$m = \frac{p}{q}$, $n = \frac{r}{s}$; ଯେପରି p, r ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଓ q, s ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା।

$$\text{(i)} \quad (a^m \times a^n)^{qs} = \left(a^{\frac{p}{q}} \times a^{\frac{r}{s}}\right)^{qs} = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{sq} \times \left(a^{\frac{r}{s}}\right)^{qs} = \left[\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^q\right]^s \times \left[\left(a^{\frac{r}{s}}\right)^s\right]^q$$

$$= (a^p)^s \times (a^r)^q = a^{ps} \times a^{rq} = a^{ps+rq}$$

$$\therefore\ a^m \times a^n = a^{\frac{ps+rq}{qs}} \Rightarrow a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}} = a^{m+n}$$ (ପ୍ରମାଣିତ)

3.5. ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଘାତରାଶି :

a^xରେ ଘାତାଙ୍କ x ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ ବିଭିନ୍ନ ଘାତାଙ୍କ ନିୟମ ଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟ ସତ୍ୟ ଅଟେ। ଏଠାରେ ମନେରଖିବା ଉଚିତ ଯେ ଏହି ନିୟମଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରମାଣ ଅତ୍ୟନ୍ତ ଜଟିଳ, ତେଣୁ a^xରେ ଘାତାଙ୍କ x ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ ପୂର୍ବେ ଆଲୋଚିତ ସମସ୍ତ ନିୟମକୁ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ରୂପେ ଗ୍ରହଣ କରିବା।

ଉଦାହରଣ – **9 :** ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

$$\text{(i)}\ 343^{\frac{1}{3}} \quad \text{(ii)}\ \left(8^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{9}} \quad \text{(iii)}\ \left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{2}{5}} \quad \text{(iv)}\ (0.125)^{\frac{1}{3}} \quad \text{(v)}\ \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

ସମାଧାନ **:**

(i) $343^{\frac{1}{3}} = \left(7^3\right)^{\frac{1}{3}} = 7^{3\times\frac{1}{3}}$, (ii) $\left(8^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{9}} = 8^{-\frac{3}{4}\times\frac{4}{9}} = 8^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

(iii) $\left(\frac{32}{243}\right)^{\frac{2}{5}} = \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^5\right\}^{\frac{2}{5}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{5\times\frac{2}{5}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$, (iv) $(0.125)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{0.125} = \sqrt[3]{(0.5)^3} = 0.5$

(v) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 10 :

$a, b, c \in R^+$, $a \neq 1$, $x, y, z \in R$ ଓ $a^x = b$, $b^y = c$, $c^z = a$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $xyz = 1$

ସମାଧାନ :

$c^z = a \Rightarrow (b^y)^z = a \quad (\because c = b^y)$

$\Rightarrow \quad b^{yz} = a \Rightarrow (a^x)^{yz} = a \ (\because b = a^x)$

$\Rightarrow \quad a^{xyz} = a^1 \Rightarrow xyz = 1$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : $a = 1$ ହେଲେ ଆମେ $xyz = 1$ ବୋଲି କହି ପାରିବା ନାହିଁ। 1 ହେଉଛି ଏକମାତ୍ର ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା ଯାହାର ସମସ୍ତ ଘାତ, ଘାତାଙ୍କ ନିର୍ବିଶେଷରେ ସମାନ। ତେଣୁ $a^m = a^n, a > 0 \Rightarrow m = n$ କେବଳ $a \neq 1$ ପାଇଁ ହିଁ ସତ୍ୟ।

ଉଦାହରଣ - 11 :

ସରଳ କର : $\sqrt{a^4 b^{-\frac{4}{3}} c^{\frac{-5}{6}}} \div \sqrt[3]{a^4 b^{-6} c^{\frac{3}{4}}}$

ସମାଧାନ :

$$\sqrt{a^4 b^{-\frac{4}{3}} c^{-\frac{5}{6}}} = \left(a^4 b^{-\frac{4}{3}} c^{-\frac{5}{6}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{4\times\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}} \cdot c^{-\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}} = a^2 \cdot b^{-\frac{2}{3}} \cdot c^{-\frac{5}{12}}$$

$$\sqrt[3]{a^4 b^{-6} c^{\frac{3}{4}}} = \left(a^4 b^{-6} c^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{4\times\frac{1}{3}} \cdot b^{-6\times\frac{1}{3}} \cdot c^{\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}} = a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{-2} \cdot c^{\frac{1}{4}}$$

$$\therefore \text{ ଦତ୍ତରାଶି} = \frac{a^2 \cdot b^{-\frac{2}{3}} \cdot c^{-\frac{5}{12}}}{a^{\frac{4}{3}} \cdot b^{-2} \cdot c^{\frac{1}{4}}} = a^{2-\frac{4}{3}} \cdot b^{-\frac{2}{3}+2} \cdot c^{-\frac{5}{12}-\frac{1}{4}}$$

$$= a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{4}{3}} \cdot c^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{ab^2}{c}\right)^{\frac{2}{3}}$$ (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3(b)

1. ଠିକ୍ ଉତ୍ତର ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର :

(i) $(0.01)^{-\frac{1}{2}} = $ —— [(A) 0.01, (B) 0.1, (C) 1.0, (D) 10]

(ii) $\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} = $ —— [(A) $\frac{1}{3}$, (B) $-\frac{1}{3}$, (C) 3, (D) –3]

(iii) $x^{-\frac{3}{5}} \cdot 2x^{-\frac{1}{5}} = $ —— $(x \in R, x > 0)$ [(A) $\frac{1}{2\sqrt[4]{x^5}}$, (B) $\frac{2}{\sqrt[4]{x^5}}$, (C) $\frac{1}{2\sqrt[5]{x^4}}$, (D) $\frac{2}{\sqrt[5]{x^4}}$]

2. ଋଣାତ୍ମକ ଓ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟା-ଘାତାଙ୍କ ଅପସାରଣ କର :

(i) $a^{\frac{3}{4}}$ (ii) a^{-4} (iii) $a^{-3\frac{1}{2}}$ (iv) $\frac{1}{a^{-5}}$ (v) $x^{-\frac{5}{7}}$ (vi) $\frac{1}{2x^{-\frac{2}{5}}}$

3. ମୂଳଚିହ୍ନ ଓ ଋଣାତ୍ମକ-ଘାତାଙ୍କ ଅପସାରଣ କର : $(a > 0, x > 0)$

(i) $\left(\sqrt[3]{a}\right)^5$ (ii) $\left(\sqrt[4]{x}\right)^{-2}$ (iii) $\frac{1}{2\sqrt[5]{x^{-3}}}$ (iv) $3\sqrt[4]{a^{-8}}$ (v) $\frac{2}{5\sqrt{x^{-3}}}$

4. ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା-ଘାତାଙ୍କ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କର; ଯେପରି : $3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2}$

(i) $a^{\frac{1}{5}}$ (ii) $10^{1\frac{1}{3}}$ (iii) $2a^{-2\frac{1}{5}}$ (iv) $3^{-\frac{1}{3}}$

5. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $64^{\frac{2}{3}}$ (ii) $16^{1\frac{1}{4}}$ (iii) $125^{1\frac{1}{3}}$ (iv) $81^{-\frac{1}{4}}$ (v) $\left(8^{\frac{-3}{4}}\right)^{\frac{4}{9}}$

(vi) $9^{-1\frac{1}{2}}$ (vii) $\left(\frac{1}{27}\right)^{-1\frac{2}{3}}$ (viii) $\left(\frac{1}{216}\right)^{-\frac{2}{3}}$ (ix) $\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^{-6}$ (x) $\left(\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\right)^{16}$

6. ସରଳ କର :

(i) $\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{2}$ (ii) $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ (iii) $\left(\sqrt[n]{a^{\sqrt{n}}}\right)^{\sqrt{n}}$ $(a > 0, n \in N)$

(iv) $\left(\sqrt[3]{3^{\sqrt[3]{3}}}\right)^{\sqrt[3]{3^2}}$ (v) $4^2 \times 8^{1-4a} \times 16^{3a-1}$ (vi) $27^{1\frac{1}{3}} \times \sqrt{\frac{1}{9}} \div 81^{-\frac{1}{4}}$

(vii) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \times 4^0 \times \left(1\frac{1}{3}\right)^{-1}$ (viii) $\left(a^{\frac{3}{4}} b^{-\frac{1}{4}}\right)^{1\frac{1}{3}}$ $(a > 0, b > 0)$

7. କେଉଁଟି ଠିକ୍?

(i) $\sqrt[4]{4} > \sqrt[3]{3}$ (ii) $\sqrt[4]{4} = \sqrt[3]{3}$ (iii) $\sqrt[4]{4} < \sqrt[3]{3}$

(ସୂଚନା - ଉଭୟର ଦ୍ୱାଦଶ ଘାତ ନେଇ ତୁଳନା କର ।)

8. ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)$ (a > 0, b > 0), (ii) $\left(1-a^{\frac{1}{4}}\right)\left(1+a^{\frac{1}{4}}\right)\left(1+a^{\frac{1}{2}}\right)$ (a > 0)

(iii) $\left(1+a^{\frac{1}{2}}\right)\left(1+a^{\frac{1}{4}}\right)\left(1+a^{\frac{1}{8}}\right)\left(1+a^{\frac{1}{16}}\right)\left(1+a^{\frac{1}{32}}\right)\left(1-a^{\frac{1}{32}}\right)$ (a > 0)

(iv) $\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}\right)$ (x > 0, y > 0)

(v) $\left(x^{-1}+x^{\frac{-1}{2}}\cdot y^{\frac{-1}{2}}+y^{-1}\right)\left(x^{-1}-x^{\frac{-1}{2}}\cdot y^{\frac{-1}{2}}+y^{-1}\right)$ (x > 0, y > 0)

9. ସରଳ କର :

(i) $\sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{1}{3}}}\div(xyz)^{\frac{1}{3}}$, (ii) $\sqrt[3]{x^2y^4z^{-1}}+\sqrt{x^{-\frac{2}{3}}y^2z^{-\frac{1}{3}}}$, (iii) $\sqrt{a^3b^{-\frac{2}{3}}c^{\frac{7}{6}}}\div\sqrt{a^4b^{-1}c^{-\frac{5}{4}}}$

10. $\{x, y, z, a, b, c\} \subset R$ ଓ $x > 0, y > 0, z > 0$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

(i) $\sqrt{x^{-1}y}\times\sqrt{y^{-1}z}\times\sqrt{z^{-1}x}=1$

(ii) $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}}\times\left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}}\times\left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}}=1$ $(a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0)$

(iii) $\left(\frac{1}{x^{a-b}}\right)^{\frac{1}{b-c}}\times\left(\frac{1}{x^{b-c}}\right)^{\frac{1}{c-a}}\times\left(\frac{1}{x^{c-a}}\right)^{\frac{1}{a-b}}=1$ [a, b ଓ c ର ମୂଲ୍ୟ ଅସମାନ]

11. (i) $a = 2^{\frac{1}{3}}-2^{-\frac{1}{3}}$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $2a^3 + 6a = 3$

(ii) $a = x^{\frac{1}{3}}-x^{-\frac{1}{3}}$, $x > 0$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $a^3 + 3a = x - \frac{1}{x}$

(iii) $x = 3^{\frac{1}{3}}+3^{-\frac{1}{3}}$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $3x^3 - 9x - 10 = 0$

12. ଯଦି $a = b^c$, $b = c^a$, $c = a^b$ ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କରଯେ, $abc = 1$
$[a, b, c \in R^+, a\neq 1, b\neq 1, c\neq 1]$

13. (i) ଯଦି $3^x = 4^y = 12^z$ ହୁଏ, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $z = \frac{xy}{x+y}$

(ii) ଯଦି $2^x = 3^y = 6^{-z}$ ହୁଏ, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$ $(x, y, z \in R)$

3.6. ଘାତାଙ୍କୀୟ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ (Solution of Exponential Equations) :

ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର।

(i) $3^{x+1} = 9$ (ii) $2^x - 4^{2x-1} = 0$

(iii) $a^x = a^{2y}$ $(a > 0, a \neq 1)$ (iv) $\begin{cases} 2^{2x-y-3} = 1 \\ 3^{x+2y-1} = 27 \end{cases}$

ଏ ସମସ୍ତ ସମୀକରଣରେ ଘାତାଙ୍କଗୁଡ଼ିକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିମାନଙ୍କଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶିତ ହୋଇଛନ୍ତି।

ସଂଜ୍ଞା : ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶିତ ହୋଇଥିବା ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସମୀକରଣକୁ ଘାତାଙ୍କୀୟ ସମୀକରଣ **(exponential equation)** କୁହାଯାଏ।

ଘାତତତ୍ତ୍ୱର ଯେଉଁ ତଥ୍ୟ ପ୍ରୟୋଗ କରି ଆମେ କେତେକ ଘାତକୀୟ ସମୀକରଣ ସମାଧାନ କରିବା, ତାହା ହେଉଛି, $a > 0, a \neq 1; x, y \in R$ ହେଲେ $a^x = a^y \Rightarrow x = y$।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ପରିମେୟ ତଥା ବାସ୍ତବ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଘାତତତ୍ତ୍ୱର ଆଲୋଚନାରେ ଆମେ ଧନାତ୍ମକ ଆଧାର ନେଇଥିଲେ। $a = 1$ ହେଲେ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ମୂଲ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ x ଓ y ପାଇଁ ମଧ୍ୟ $a^x = a^y$ ହେବ। ତେଣୁ $a^x = a^y \Rightarrow x = y$ ସତ୍ୟ ହେବନାହିଁ। ସେହି କାରଣରୁ $a > 0$ ଓ $a \neq 1$ ସର୍ତ୍ତରୂପେ ନିଆଗଲା।

ଉଦାହରଣ - 12 : ସମାଧାନ କର : $2^x - 4^{2x-1} = 0$

ସମାଧାନ : $2^x - 4^{2x-1} = 0 \Rightarrow 2^x = 4^{2x-1} \Rightarrow 2^x = (2^2)^{2x-1} \Rightarrow 2^x = 2^{2(2x-1)}$

$\Rightarrow 2^x = 2^{4x-2}$ [$a^x = a^y \Rightarrow x = y$ $(a > 0, a \neq 1)$ ଏହି ସୂତ୍ରର ପ୍ରୟୋଗ ପାଇଁ ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ସମାନ ଆଧାର ବିଶିଷ୍ଟ ଘାତରାଶି ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରାଗଲା।]

$\Rightarrow x = 4x - 2 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 13 :

ସମାଧାନ କର : $3^{x+2} + 3^{x+4} = 810$

ସମାଧାନ : $3^{x+2} + 3^{x+4} = 3^{x+2} + 3^{x+2} \times 3^2 = 3^{x+2}(1 + 3^2) = 10 \times 3^{x+2}$

ତେଣୁ, $3^{x+2} + 3^{x+4} = 810 \Rightarrow 10 \times 3^{x+2} = 810 \Rightarrow 3^{x+2} = 81$

$\Rightarrow 3^{x+2} = 3^4 \Rightarrow x + 2 = 4 \Rightarrow x = 2$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 14 : ସମାଧାନ କର : $2^{x+2} \times 3^{x-2} = 96$

ସମାଧାନ : $2^{x+2} \times 3^{x-2} = 96$

$\Rightarrow 2^{x+2} \times 3^{x-2} = 2^5 \times 3 \Rightarrow \frac{2^{x+2} \times 3^{x-2}}{2^5 \times 3} = 1 \Rightarrow 2^{x-3} \times 3^{x-3} = 1$

$\Rightarrow (2 \times 3)^{x-3} = 6^0 \Rightarrow 6^{x-3} = 6^0 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 15 : ସମାଧାନ କର $2^{3-x} \times 4^{2x-1} = 16$

ସମାଧାନ : $2^{3-x} \times 4^{2x-1} = 2^{3-x} \times (2^2)^{2x-1} = 2^{3-x} \times 2^{2(2x-1)}$

$= 2^{3-x} \times 2^{4x-2} = 2^{3-x+4x-2} = 2^{3x+1}$

ତେଣୁ $2^{3-x} \times 4^{2x-1} = 16 \Rightarrow 2^{3x+1} = 16 \Rightarrow 2^{3x+1} = 2^4$

$\Rightarrow 3x + 1 = 4 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 16 : ସମାଧାନ କର : $3^x - 9^y = 0$ ଏବଂ $x + y = 3$

ସମାଧାନ : $3^x - 9^y = 0 \Rightarrow 3^x = 9^y$

$\Rightarrow 3^x = (3^2)^y \Rightarrow 3^x = 3^{2y} \Rightarrow x = 2y$

$x = 2y$ ଏବଂ $x + y = 3$ ରୁ ପାଇବା $2y + y = 3 \Rightarrow 3y = 3 \Rightarrow y = 1$

$\therefore x = 2y = 2 \times 1 = 2$

$\therefore x = 2$ ଓ $y = 1$ (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3(c)

1. କେଉଁଟି ଘାତାଙ୍କୀୟ ସମୀକରଣ ?

   (i) $4^x = 2^{2x}$ (ii) $4^x = 2^2$ (iii) $3^2x^2 = 4^2$

2. ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିର ମୂଲ୍ୟ ଲେଖ : (i) $3^x = \frac{1}{9}$, (ii) $5^y = 1$, (iii) $2^x = \sqrt{2}$

3. ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : (i) $3^{x+2} = 81$, (ii) $5^y = 5\sqrt{5}$, (iii) $\frac{1}{2^x} = 16$

4. ସମାଧାନ କର : (i) $2^{2x} = 16$, (ii) $\frac{1}{7^{1-y}} = 49$, (iii) $6^x = \frac{1}{1296}$

5. ସମାଧାନ କର :

   (i) $5 \times 25^x = 125^{x-1}$, (ii) $2^{x-3} - 4^{x+1} = 0$, (iii) $3^{x+5} = 3^{x+3} + \frac{8}{3}$, (iv) $\left(\sqrt{2}\right)^{x+2} = \left(2\sqrt{2}\right)^{3x}$

   (v) $\left(\sqrt{3}\right)^{x+5} = \left(\sqrt[3]{3}\right)^{2x}$, (vi) $2^{x+2} \times 3^{x-1} = 288$, (vii) $3^{x+1} \times 5^{1-x} = 9$, (viii) $3^{y+2} \times 27^{3-y} = 2187$

6. ସମାଧାନ କର।

   (i) $5^x - 25^{y-1} = 0$, $2x + y = 11$ (ii) $2^x + 3^y = 7$, $2^x - 3^y = 1$

   (iii) $2^{2x-y-2} = 32$, $5^{x+2y+1} = 25$ (iv) $8^x = 4^y$, $9^x = 3^{y-1}$

3.7. ଲଗାରିଦମ୍ (Logarithm) :

ଲଗାରିଦମ୍‌ର ବିଶେଷତ୍ୱ ହେଲା, ସାନ ବା ବଡ଼ ଯେ କୌଣସି ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ବିଶିଷ୍ଟ ଆଧାରରେ ଘାତରାଶି ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରେ। ଫଳରେ ଖୁବ୍ ସାନ ବା ଖୁବ୍ ବଡ଼ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଗୁଣନ, ହରଣ, ଘାତ ବା ମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ଲଗାରିଦମ୍ ସାହାଯ୍ୟରେ ସହଜରେ କରାଯାଇପାରେ।

ସ୍କଟ୍‌ଲ୍ୟାଣ୍ଡରେ ଅବସ୍ଥିତ ମର୍ଚ୍ଚିଷ୍ଟନର ଜମିଦାର John Napier (1550-1617), 1614 ଖ୍ରୀଷ୍ଟାବ୍ଦରେ ଲଗାରିଦମ୍ ଉଦ୍ଭାବନ କରିଥିଲେ।

ତୁମେ ଜାଣ ଯେ **$8 = 2^3$, ଏକ ଘାତାଙ୍କୀୟ ଉକ୍ତି**। ଏହି ଉକ୍ତିରେ 8କୁ 2 ଓ 3 ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇଅଛି। ସେହିପରି ତୁମେ ଜାଣ ଯେ **$2 = \sqrt[3]{8}$, ଏକ ମୂଳ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଉକ୍ତି**। ଏହି ଉକ୍ତିରେ 2କୁ 8 ଓ 3 ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇଅଛି।

ବର୍ତ୍ତମାନ ମନରେ ସ୍ୱତଃ ପ୍ରଶ୍ନ ଉଠେ ଯେ 3କୁ 2 ଓ 8 ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରିବ କି ? ଉତ୍ତରଟି ହେଉଛି ହଁ ଏବଂ ତାହା $3 = \log_2 8$ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇଥାଏ।

ଏଠାରେ 3 ହେଉଛି, 2 ଆଧାରରେ 8ର ଲଗାରିଦମ୍। $\log_2 8 = 3$ ହେଉଛି ଏକ ଲଗାରିଦମୀୟ ଉକ୍ତି ଏବଂ $8 = 2^3$ ହେଉଛି ଏକ ଘାତାଙ୍କୀୟ ଉକ୍ତି। $8 = 2^3$ ବା $2 = \sqrt[3]{8}$ ବା $3 = \log_2 8$ ତିନୋଟିଯାକ ହେଉଛି ଏକାର୍ଥବୋଧକ ଉକ୍ତି। ପ୍ରତ୍ୟେକଟିରେ 2, 3 ଓ 8 ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମ୍ବନ୍ଧଟି ଦର୍ଶାଯାଇଅଛି।

ଲଗାରିଦମ୍‌ର ସଂଜ୍ଞା :

a, x, y ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ $a > 0, y > 0$ ଏବଂ $a \neq 1$ ହେଲେ, $a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y$

'$x = \log_a y$' କୁ "x = ଆଧାର a ରେ yର ଲଗାରିଦମ୍" – ଏହିପରି ପଢ଼ାଯାଏ।

[ସୂଚନା : ଏକ ଘାତାଙ୍କୀୟ ଉକ୍ତିର ଘାତାଙ୍କକୁ ମାନ ଓ ଆଧାର ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରିବା ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ଲଗାରିଦମ୍ କୁହାଯାଏ।]

ଏହି ସଂଜ୍ଞା ଅନୁସାରେ ଆମେ ପାଇବା – $\log_3 27 = 3, \log_{10} 100 = 2, \log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$ ଇତ୍ୟାଦି।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ :

(i) y ଏକ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ, ତା'ର ଲଗାରିଦମ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିହେବ। କିନ୍ତୁ y ଋଣାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ବା ଶୂନ ହେଲେ, $\log_a y$ $(a > 0, a \neq 1)$ ନିରର୍ଥକ ଅଟେ।

(ii) ଲଗାରିଦମ୍ ସଂଜ୍ଞାରେ $a > 0, a \neq 1$ ନିଆଯାଇଅଛି। କାରଣ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା x କ୍ଷେତ୍ରରେ $a > 0$ ନେଲେ ହିଁ $a^x = y$ ପାଇପାରିବା।

ପୁନଶ୍ଚ $a = 1$ ହେଲେ, ଯେଉଁ ବିରୋଧାଭାଷ (contradiction) ସୃଷ୍ଟିହେବ, ତାକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରାଯାଇପାରେ।

$a = 1$ ହେଲେ, $1^5 = 1 \Rightarrow 5 = \log_1 1$ ଏବଂ $1^6 = 1 \Rightarrow 6 = \log_1 1$

ତେଣୁ $5 = 6$, ଏକ ବିରୋଧାଭାଷ ସେଥିପାଇଁ ସଂଜ୍ଞାରେ $a \neq 1$ ନିଆଯାଇଅଛି।

ମନେରଖ : ଯେହେତୁ $a^1 = a$ ଏବଂ $a^0 = 1, (a > 0, a \neq 1)$ ତେଣୁ $\boxed{\log_a a = 1}$ ଏବଂ $\boxed{\log_a 1 = 0}$

ଉଦାହରଣ - 1 :

ନିମ୍ନ ଘାତାଙ୍କୀୟ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକୁ ଲଗାରିଦମୀୟ ଉକ୍ତିରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(i) $5^x = y$ (ii) $2^5 = 32$ (iii) $4^3 = 64$ (iv) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$ (v) $10^{-3} = 0.001$

ସମାଧାନ : (i) $5^x = y \Rightarrow x = \log_5 y$ (ii) $2^5 = 32 \Rightarrow 5 = \log_2 32$

(iii) $4^3 = 64 \Rightarrow 3 = \log_4 64$ (iv) $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{3} = \log_{\frac{1}{8}}\left(\frac{1}{2}\right)$

(v) $10^{-3} = 0.001 \Rightarrow -3 = \log_{10} 0.001$

ଉଦାହରଣ - 2 :

ନିମ୍ନଲିଖିତ ଲଗାରିଦମୀୟ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକୁ ଘାତାଙ୍କୀୟ ଉକ୍ତିରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(i) $\log_2 4 = 2$, (ii) $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$, (iii) $\log_5 125 = 3$, (iv) $\log_{0.4} 0.16 = 2$, (v) $\log_{10} 0.1 = -1$

ସମାଧାନ : (i) $2^2 = 4$, (ii) $\sqrt{3}^4 = 9$, (iii) $5^3 = 125$, (iv) $(0.4)^2 = 0.16$, (v) $(10)^{-1} = 0.1$

ଉଦାହରଣ - 3 : ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : (i) $\log_2 128$, (ii) $\log_3 243$, (iii) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{36}$

ସମାଧାନ :

(i) ମନେକର $\log_2 128 = x \Rightarrow 2^x = 128 = 2^7 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow \log_2 128 = 7$

(ii) ମନେକର $\log_3 243 = x \Rightarrow 3^x = 243 = 3^5 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow \log_3 243 = 5$

(iii) ମନେକର $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{36} = y \Rightarrow \left(\frac{1}{6}\right)^y = \frac{1}{36} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{36} = 2$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3(d)

ଲଗାରିଦମୀୟ ଉକ୍ତିରେ ପ୍ରକାଶ କର :

(i) $5^3 = 125$ (ii) $8^2 = 64$ (iii) $15^2 = 225$ (iv) $16^{\frac{3}{4}} = 8$ (v) $36^{\frac{1}{2}} = 6$ (vi) $3^{-2} = \frac{1}{9}$

(vii) $9^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{27}$ (viii) $10^x = 150$ (ix) $x^3 = y\ (x > 0, x \neq 1)$ (x) $10^{-2} = 0.01$

(xi) $\left(\sqrt{2}\right)^6 = 8$ (xii) $2^{-2} = \frac{1}{4}$

2. ଘାତାଙ୍କୀୟ ଉକ୍ତିରେ ପ୍ରକାଶ କର :

(i) $\log_5 25 = 2$ (ii) $\log_{10} 1000 = 3$ (iii) $\log_{11} 1331 = 3$ (iv) $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$

(v) $\log_{0.5} 0.125 = 3$ (vi) $\log_{\frac{2}{3}} \frac{4}{9} = 2$ (vii) $\log_{10} 0.01 = -2$ (viii) $\log_{10} 0.0001 = -4$

3. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $\log_{10} 10$ (ii) $\log_{10} 100$ (iii) $\log_3 243$ (iv) $\log_{\frac{1}{7}} \frac{1}{49}$

(v) $\log_{0.4} 0.16$ (vi) $\log_2 \log_2 4$ (vii) $\log_{0.01} 1$ (viii) $\log_{0.01} 0.01$

4. 'x' ର ମାନ ସ୍ଥିର କର :

(i) $\log_4 64 = x$ (ii) $\log_{\sqrt{3}} 3 = x$ (iii) $\log_3 x = 3$ (iv) $\log_5 x = 2$

(v) $\log_{\sqrt{2}} x = 2$ (vi) $\log_x 5 = 1$ (vii) $\log_x 64 = 6$ (viii) $\log_x 1 = 0$

5. ଠିକ୍ ଉକ୍ତିଲାଗି T ଓ ଭୁଲ୍ ଉକ୍ତିଲାଗି F ଲେଖ :

(i) $\log_{0.2} 0.2 = 0.1$ (ii) $\log_6 12 = 2$ (iii) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ (iv) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3$

(v) $\sqrt{16} = 4 \Leftrightarrow \log_{16} 4 = \frac{1}{2}$ (vi) $10^{-3} = 0.001 \Leftrightarrow \log_{-3} 0.001 = 10$

(vii) $a^x = y \ (a > 0,\ a \neq 1) \Leftrightarrow \log_a x = y$

3.8. ଲଗାରିଦମ୍ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ନିୟମ (Rules of Logarithm) :

ପୂର୍ବ ଆଲୋଚନାରୁ ଆମେ ଜାଣିଲେ ଯେ ଲଗାରିଦମ୍ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଘାତ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଉପରେ ଆଧାରିତ। ଏଣୁ ଘାତାଙ୍କୀୟ ନିୟମରୁ ଲଗାରିଦମ୍ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ନିୟମ ମିଳିଥାଏ। ସେଗୁଡ଼ିକ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା।

ଉପପାଦ୍ୟ : a, m, n ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ $a \neq 1$ ହେଲେ, (i) $\log_a (mn) = \log_a m + \log_a n$,

(ii) $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$ ଏବଂ (iii) $\log_a m^p = p \log_a m \ (p \in R)$

ପ୍ରମାଣ :

(i) ମନେକର $\log_a m = x$, $\log_a n = y$ ଏବଂ $\log_a (mn) = z$

ସଂଜ୍ଞାନୁସାରେ $m = a^x$, $n = a^y$ ଏବଂ $mn = a^z$

$\Rightarrow a^z = mn = a^x \cdot a^y = a^{x+y} \Rightarrow z = x + y$

$\therefore \log_a (mn) = \log_a m + \log_a n$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : $\log_a (mnp....) = \log_a m + \log_a n + \log_a p + ...$

(m, n, p ....., a ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $a \neq 1$)

(ii) ମନେକର $\log_a m = x$, $\log_a n = y$ ଏବଂ $\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = z$

ସଂଜ୍ଞାନୁସାରେ $m = a^x$, $n = a^y$ ଏବଂ $\frac{m}{n} = a^z$

$\Rightarrow a^z = \frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \Rightarrow z = x - y$

$\therefore \log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$ (ପ୍ରମାଣିତ)

(iii) ମନେକର $\log_a m = x$ ଏବଂ $\log_a m^p = z$

ସଂଜ୍ଞାନୁସାରେ $m = a^x$ ଏବଂ $m^p = a^z$

$\therefore a^z = m^p = (a^x)^p = a^{xp} \Rightarrow z = xp \Rightarrow z = px$

$\therefore \log_a (m)^p = p \log_a m$ (ପ୍ରମାଣିତ)

3.9. ଆଧାର ପରିବର୍ତ୍ତନ (Change of base) :

କୌଣସି ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା 'm'ର ଲଗାରିଦମ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲାବେଳେ ଯଦି ଆଧାର 'a'କୁ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରାଯାଇ ଆଧାର 'b' ନିଆଯାଏ, ତେବେ ଉଭୟ ଲଗାରିଦମ୍ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମ୍ବନ୍ଧଟି

$\log_a m = \log_b m \times \log_a b$ ($a \neq 1$, $b \neq 1$ ଓ a, b ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା ।)

ପ୍ରମାଣ :

ମନେକର $\log_a m = x$, $\log_b m = y$ ଏବଂ $\log_a b = z$

ତେଣୁ ସଂଜ୍ଞାନୁସାରେ $a^x = m$, $b^y = m$ ଏବଂ $a^z = b$

$a^x = m = b^y = (a^z)^y = a^{yz}$ [$b = a^z$ ଲେଖାଯିବାରୁ]

$\Rightarrow x = yz \Rightarrow \log_a m = \log_b m \times \log_a b$ .... (i) (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 : $\log_a b \times \log_b a = 1$

ପ୍ରମାଣ : ମନେକର $\log_a b = m \Rightarrow a^m = b \Rightarrow a = b^{\frac{1}{m}}$

ଏବଂ $\log_b a = n \Rightarrow b^n = a$

$\therefore b^{\frac{1}{m}} = b^n \Rightarrow \frac{1}{m} = n \Rightarrow mn = 1$ ଅର୍ଥାତ୍ $\log_a b \times \log_b a = 1$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ବି.ଦ୍ର. : 3.9 ର ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ-1ର ପ୍ରମାଣ ପାଇଁ (i)ରେ m = a ର ପ୍ରୟୋଗ ମଧ୍ୟ ହୋଇପାରେ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ-2 : $\log_a m = \frac{\log_b m}{\log_b a}$

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ-3 : $\log_a m = \log_b m \times \log_c b \times \log_a c$

ଉଦାହରଣ - 4 :

$a > 0$ ଓ $a \neq 1$ ନେଇ ନିମ୍ନ ଲଗାରିଦମଗୁଡ଼ିକୁ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଲଗାରିଦମ୍‌ରେ ପ୍ରକାଶ କର :

(i) $\log_a 6$ (ii) $\log_a 30$ (iii) $\log_a 2\frac{1}{7}$ (iv) $\log_a 72$

ସମାଧାନ :

(i) $\log_a 6 = \log_a (2\times3) = \log_a 2 + \log_a 3$ ଉପପାଦ୍ୟ (i)

(ii) $\log_a 30 = \log_a (2 \times 3 \times 5) = \log_a 2 + \log_a 3 + \log_a 5$ ଉପପାଦ୍ୟ (i) ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ

(iii) $\log_a 2\frac{1}{7} = \log_a \frac{15}{7} = \log_a 15 - \log_a 7$ ଉପପାଦ୍ୟ (ii)

$= \log_a (3 \times 5) - \log_a 7 = \log_a 3 + \log_a 5 - \log_a 7$ ଉପପାଦ୍ୟ (i)

(iv) $\log_a 72 = \log_a (2^3 \times 3^2) = \log_a 2^3 + \log_a 3^2$ ଉପପାଦ୍ୟ (i)

$= 3 \log_2 a + 2 \log_a 3$ ଉପପାଦ୍ୟ (iii)

(ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 5 :

ଘାତାଙ୍କୀୟ ଉକ୍ତିରେ ପ୍ରକାଶ କର : $(a, x, y > 0, a \neq 1)$

(i) $2 \log_a x + 3\ {}^1\!og_a y = 5$ (ii) $x \log_a 5 - y \log_a 6 = 2$

ସମାଧାନ :

(i) $2 \log_a x + 3 \log_a y = 5 \Rightarrow \log_a x^2 + \log_a y^3 = 5$ ଉପପାଦ୍ୟ (iii)

$\Rightarrow \log_a (x^2y^3) = 5 \Rightarrow x^2y^3 = a^5$ (ଉତ୍ତର) ଉପପାଦ୍ୟ (i) (ସଂଜ୍ଞା)

(ii) $x \log_a 5 - y \log_a 6 = 2 \Rightarrow \log_a 5^x - \log_a 6^y = 2$ ଉପପାଦ୍ୟ (iii)

$\Rightarrow \log_a \left(\frac{5^x}{6^y}\right) = 2 \Rightarrow \frac{5^x}{6^y} = a^2$ or $5^x = a^2.6^y$ (ଉତ୍ତର) ଉପପାଦ୍ୟ (ii) (ସଂଜ୍ଞା)

(ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 6 : ଏକପଦରେ ପ୍ରକାଶ କର :

(i) $\log_b 2 + \log_b 3 + \log_b x$ $[x > 0, b > 0, b \neq 1]$

(ii) $\log_a 15 - \log_a 3$ $[a > 0, a \neq 1]$

(iii) $3\log_a 2 + 2 \log_a 3 + \log_a 5 - \log_a 9$ $[a > 0, a \neq 1]$

ସମାଧାନ :

(i) $\log_b 2 + \log_b 3 + \log_b x = \log_b (2 \times 3 \times x)$ ଉପପାଦ୍ୟ (i)ର ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ

$= \log_b 6x$ (ଉତ୍ତର)

(ii) $\log_a 15 - \log_a 3$

$= \log_a \frac{15}{3} = \log_a 5$ ଉପପାଦ୍ୟ (ii) (ଉତ୍ତର)

(iii) $3\log_a 2 + 2\log_a 3 + \log_a 5 - \log_a 9$

$= \log_a 2^3 + \log_a 3^2 + \log_a 5 - \log_a 9$ ଉପପାଦ୍ୟ (iii)

$= \log_a(2^3 \times 3^2 \times 5) - \log_a 9$ ଉପପାଦ୍ୟ (i) ର ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ

$= \log_a\left(\frac{2^3 \times 3^2 \times 5}{9}\right) = \log_a 40$ ଉପପାଦ୍ୟ (ii) (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 7 : ସରଳ କର : (i) $\frac{\log_2 8}{\log_2 16}$ (ii) $\log_2 \sqrt{6} + \log_2 \sqrt{\frac{2}{3}}$

ସମାଧାନ :

(i) $\frac{\log_2 8}{\log_2 16} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^4} = \frac{3\log_2 2}{4\log_2 2} = \frac{3 \times 1}{4 \times 1} = \frac{3}{4}$

(ii) $\log_2 \sqrt{6} + \log_2 \sqrt{\frac{2}{3}} = \log_2 (6)^{\frac{1}{2}} + \log_2\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}\log_2 6 + \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\log_2(2 \times 3) + \frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2}{3}\right)$

$= \frac{1}{2}(\log_2 2 + \log_2 3) + \frac{1}{2}(\log_2 2 - \log_2 3) = 2 \cdot \frac{1}{2}\log_2 2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 8 : $3^{5\log_3 2}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

ସମାଧାନ :

ମନେକର $x = 3^{5\log_3 2}$

$\therefore \log_3 x = 5\log_3 2 \Rightarrow \log_3 x = \log_3(2^5) \Rightarrow x = 2^5 = 32$

$\therefore 3^{5\log_3 2}$ ର ମାନ $= 32$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 9 : ପ୍ରମାଣ କର : $\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y \ (x > 0, y > 0)$

ସମାଧାନ :

$\log_a x = \log_a y \Rightarrow \log_a x - \log_a y = 0 \Rightarrow \log_a\left(\frac{x}{y}\right) = 0$ ଉପପାଦ୍ୟ (ii)

$\Rightarrow \frac{x}{y} = a^0 = 1 \Rightarrow x = y$ (ଲଗାରିଦମର ସଂଜ୍ଞା) (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 10 :

ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\log_b a \times \log_c b \times \log_a c = 1$

ସମାଧାନ :

ଆମେ ଜାଣିଛେ ଯେ, $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$ (ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ-2)

$\therefore$ ବାମପକ୍ଷ $= \log_c a \times \frac{1}{\log_c b} \times \log_c b \times \log_a c$

$= \log_c a \times \log_a c = 1$ (ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ- 1)(ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 11 :

ଯଦି $x = \log_{(2a)} a$, $y \Rightarrow \log_{(3a)} 2a$, $z = \log_{(4a)} 3a$ ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $1 + xyz = 2\ yz$

ପ୍ରମାଣ :

ବାମପକ୍ଷ $= 1 + xyz = 1 + \log_{2a} a. \log_{3a} 2a. \log_{4a} 3a = 1 + (\log_{2a} a . \log_{3a} 2a) . \log_{4a} 3a$

$= 1 + \log_{3a} a . \log_{4a} 3a = 1 + \log_{4a} a = \log_{4a} 4a + \log_{4a} a$

$= \log_{4a} (4a \times a) = \log_{4a} (4a^2) = \log_{4a} (2a)^2 = 2 \log_{4a} (2a)$

ଦକ୍ଷିଣପକ୍ଷ $= 2yz = 2(\log_{3a} 2a . \log_{4a} 3a) = 2 \log_{4a} 2a =$ ବାମପକ୍ଷ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3(e)

1. $a > 0, a \neq 1$ ନେଇ ନିମ୍ନ ଲଗାରିଦମ୍‌ଗୁଡ଼ିକୁ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଲଗାରିଦମ୍‌ରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(i) $\log_a 27$ (ii) $\log_a 56$ (iii) $\log_a \frac{8}{9}$ (iv) $\log_a 243$ (v) $\log_a 105$

(vi) $\log_a 108$ (vii) $\log_a \frac{4}{27}$ (viii) $\log_a \frac{25}{98}$ (ix) $\log_a 0.3$ (x) $\log_a 0.04$

2. ସହଗ ଅପସାରଣ କରି ପ୍ରତ୍ୟେକକୁ $\log_a N$ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କର : $(a > 0, a \neq 1)$

(i) $2 \log_a 5$ (ii) $3 \log_a 2$ (iii) $\frac{1}{2} \log_a 25$ (iv) $\frac{1}{3} \log_a 729$ (v) $\frac{1}{2} \log_a 64$

(vi) $-2 \log_a 4$ (vii) $3 \log_a x^2\ (x > 0)$ (viii) $\frac{1}{2} \log_a (x^2 y^4)\ (x, y > 0)$

(ix) $-2 \log_a \sqrt{x}\ (x > 0)$ (x) $-\frac{1}{3} \log_a \frac{x}{y}\ (x, y > 0, x \neq y)$

3. ଗୋଟିଏ ଲଗ୍‌ପଦରେ ପ୍ରକାଶ କର : $[a > 0, a \neq 1]$

(i) $3 \log_a 2 + 3 \log_a 5$ (ii) $4 \log_a 10 - 3 \log_a 5$

(iii) $2 \log_a 2 + 3 \log_a 5 - 2 \log_a 10$ (iv) $2 \log_a 8 - 4 \log_a 6 + 3 \log_a 9$

(v) $\frac{1}{2} \log_a 9 + \frac{1}{3} \log_a 64 - \frac{1}{2} \log_a 36$ (vi) $3 \log_a x + 2\log_a y - \log_a z\ (x, y, z > 0)$

(vii) $\frac{1}{3} \log_a x^6 - \frac{1}{2} \log_a \frac{1}{x^6} + \frac{1}{2} \log_a (x^6 y^4)$. $[x, y > 0]$

4. ଘାତାଙ୍କୀୟ ଉକ୍ତିରେ ପ୍ରକାଶ କର : $(a > 0, a \neq 1)$

(i) $\log_a x + \log_a y = 2$ $(x, y > 0)$ (ii) $\log_a m + 2\log_a n = 3$ $(m, n > 0)$

(iii) $x\log_a 5 - y\log_a 6 = 2$ (iv) $1 + x\log_a 2 = 0$

(v) $x\log_a x + y\log_a y + z\log_a z = 0$ $(x, y, z > 0)$

5. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) $5^{\log_5 3}$ (ii) $6^{4\log_6 2}$ (iii) $\log_4(2^6)$ (iv) $\log_2 \log_2 \log_2 16$

6. ସରଳ କର :

(i) $\frac{1}{2}\log_a 9 + \frac{1}{3}\log_a 64 - \frac{1}{2}\log_a 36$ $(a > 0, a \neq 1)$ (ii) $\log_2\sqrt{6} + \log_2\sqrt{\frac{2}{3}}$

(iii) $\dfrac{\log_a 36 + \log_a 25}{\log_a 2 + \log_a 3 + \log_a 5}$ $(a > 0, a \neq 1)$ (iv) $\dfrac{\log_5 25 + \log_5 50 - \log_5 2}{\log_5 125}$

7. ସରଳୀକୃତ ମାନ ସ୍ଥିର କର :

(i) $\dfrac{\log_2 8}{\log_2 16} =$ ____ (ii) $\dfrac{\log_2 32}{\log_2 4} =$ ____ (iii) $\dfrac{\log_3 \frac{1}{9}}{\log_3\sqrt{3}} =$ ____

8. (i) $x^2 + y^2 = 7xy$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\log_a \dfrac{x+y}{3} = \dfrac{1}{2}(\log_a x + \log_a y)$

$(a > 0, a \neq 1)$

(ii) ଯଦି $\log_x\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = \dfrac{1}{2}(\log_x a + \log_x b)$ ହୁଏ ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $a = b$ ।

$(x > 0, x \neq 1)$

9. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\log_a(1+2+3) = \log_a 1 + \log_a 2 + \log_a 3$ $(a > 0, a \neq 1)$

10. (i) x, y, z ଓ a ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ $a \neq 1$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

$x^{\log_a y - \log_a z} \times y^{\log_a z - \log_a x} \times z^{\log_a x - \log_a y} = 1$

(ii) ଯଦି $\dfrac{\log_a x}{y-z} = \dfrac{\log_a y}{z-x} = \dfrac{\log_a z}{x-y}$ ହୁଏ, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $xyz = 1$ । $(a\neq1, b\neq1)$

11. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\log_a x \times \log_b y = \log_b x \times \log_a y$ (x, y, z ଓ a ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ $a\neq1$)

12. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\log_{mn} x = \dfrac{\log_n x}{1+\log_n m}$ $(x, m, n \in R,$ m,n, ଓ mn, 1 ସହ ସମାନ ନୁହେଁ)

13. ସମାଧାନ କର : $\dfrac{1}{\log_x 10} + 2 = \dfrac{2}{\log_5 10}$

14. ଯଦି $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = \dfrac{21}{4}$ ହୁଏ, ତେବେ 'x' ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

3.10. ସାଧାରଣ ଲଗାରିଦମ୍ (Common Logarithm) :

$a^x = y \Leftrightarrow \log_a y = x \qquad (a > 0, a \neq 1, y > 0)$

ଏଠାରେ 'a' ହେଉଛି ଲଗାରିଦମ୍‌ର ଆଧାର, ଯାହାର ମାନ 1 ଭିନ୍ନ ଯେ କୌଣସି ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା। ଯଦି **'a' ମାନ 10 ହୁଏ, ତେବେ ସେହି ଲଗାରିଦମ୍‌କୁ ସାଧାରଣ ଲଗାରିଦମ୍ କୁହାଯାଏ।** ଯଦି ଲଗାରିଦମ୍‌ର ଆଧାର ଲେଖାଯାଇ ନଥାଏ, ତେବେ ଆଧାର 10 ବୋଲି ବୁଝାଯାଏ। ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ log 2ରେ ଆଧାର 10 ଅଟେ।

ନେପିଅରଙ୍କ ସମସାମୟିକ ଇଂରେଜ ଗଣିତଜ୍ଞ Henry Briggs (1561-1630), 1624 ମସିହାରେ 10 ଆଧାର ବିଶିଷ୍ଟ ସାଧାରଣ ଲଗାରିଦମ୍ (Common Logarithm) ଉଦ୍ଭାବନ କରିଥିଲେ। ଯଦିଓ ନେପିଅର୍ ଓ ବ୍ରିଗ୍‌ସ୍ ମିଳିତଭାବେ ଲଗାରିଦମ୍ ସାରଣୀ (log table) ପ୍ରସ୍ତୁତି ଆରମ୍ଭ କରିଥିଲେ, କିନ୍ତୁ ନେପିଅରଙ୍କ ମୃତ୍ୟୁପରେ ବ୍ରିଗ୍‌ସ୍ ସେହି ସାରଣୀକୁ ସଂପୂର୍ଣ୍ଣ କରିଥିଲେ। 10 ଆଧାର ବିଶିଷ୍ଟ ଏହି ଲଗାରିଦମ୍ ସାରଣୀ ''ସାଧାରଣ ଲଗ୍ ଟେବୁଲ୍'' ନାମରେ ପରିଚିତ।

ଆମେ ଦୈନନ୍ଦିନ ଜୀବନରେ ଦଶମିକ ସଂଖ୍ୟା ପଦ୍ଧତି ଅନୁସରଣ କରୁଥିବାରୁ ସାଧାରଣ ଲଗାରିଦମ୍‌ର ବ୍ୟବହାରିକ ଉପଯୋଗିତା ଖୁବ୍ ଅଧିକ। ସାଧାରଣ ଲଗାରିଦମ୍ ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ ଏକ ଲଗାରିଦମ୍ ''ସ୍ୱାଭାବିକ ଲଗାରିଦମ୍'' (Natural Logarithm) ବା ନେପିରୀୟ ଲଗାରିଦମ୍ (Napierian Logarithm)ର ପ୍ରଚଳନ ଗଣିତ ଶାସ୍ତ୍ରରେ ଦେଖାଯାଏ। ସ୍ୱାଭାବିକ ଲଗାରିଦମ୍‌ର ଆଧାର ହେଉଛି, ଏକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା 'e' ଯାହାର ଦଶମିକ ବିନ୍ଦୁପରେ ଦଶସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଆସନ୍ନମାନ ହେଉଛି 2.7182818284। ଗଣିତ ଶାସ୍ତ୍ରରେ π ଭଳି e ଗୋଟିଏ ଅତି ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା। ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା y ର ସ୍ୱାଭାବିକ ଲଗାରିଦମ୍‌କୁ 'Ln x' ବୋଲି ଲେଖାଯାଏ। ତେଣୁ Ln x ଅର୍ଥାତ୍ $\log_e y = x$ ହେଲେ, $y = e^x$।

କୌଣସି ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟାର ଲଗାରିଦମୀୟ ମାନ ଏକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହୋଇଥିବାରୁ, ଦଶମିକ ବିନ୍ଦୁପରେ କେବଳ ଚାରିସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଆସନ୍ନମାନ ଲଗ୍ ଟେବୁଲରେ ଦିଆଯାଇଅଛି। ନିମ୍ନରେ କେତୋଟି ମୁଖ୍ୟ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟାର ଲଗାରିଦମୀୟମାନ ପ୍ରଦତ୍ତ ହେଲା, ଯାହା ସାହାଯ୍ୟରେ କେବଳ ଲଗାରିଦମୀୟ ନିୟମ ପ୍ରୟୋଗ କରି ଅନ୍ୟ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ସଂଖ୍ୟାର ଲଗାରିଦମୀୟ ମାନ ନିରୂପଣ ମଧ୍ୟ କରିହେବ।

ମନେରଖ : (ଆସନ୍ନମାନ) $\log 2 = 0{\cdot}3010$, $\log 3 = 0{\cdot}4771$, $\log 7 = 0{\cdot}8451$

ଉଦାହରଣ - 12 :

ନିମ୍ନ ପ୍ରଦତ୍ତ ଲଗାରିଦମ୍‌ଗୁଡ଼ିକର ଆସନ୍ନମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(i) log 4 (ii) log 5 (iii) log 6 (iv) log 21 (v) log 50

ସମାଧାନ :

(i) $\log 4 = \log 2^2 = 2 \log 2 = 2 \times 0{\cdot}3010 = 0{\cdot}6020$ (ଉତ୍ତର)

(ii) $\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0{\cdot}3010 = 0{\cdot}6990$ (ଉତ୍ତର)

(iii) $\log 6 = \log (2 \times 3) = \log 2 + \log 3 = 0{\cdot}3010 + 0{\cdot}4771 = 0{\cdot}7781$ (ଉତ୍ତର)

(iv) $\log 21 = \log (3 \times 7) = \log 3 + \log 7 = 0{\cdot}4771 + 0{\cdot}8451 = 1{\cdot}3222$ (ଉତ୍ତର)

(v) $\log 50 = \log\frac{100}{2} = \log 100 - \log 2 = 2 - 0{\cdot}3010 = 1{\cdot}6990$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 13 :

ନିମ୍ନପ୍ରଦତ୍ତ ଲଗାରିଦମ୍‌ଗୁଡ଼ିକର ଆସନ୍ନମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(i) $\log \frac{1}{2}$ (ii) $\log \frac{1}{3}$ (iii) $\log (0{\cdot}4)$ (iv) $\log (0{\cdot}0028)$

ସମାଧାନ :

(i) $\log\frac{1}{2} = \log 1 - \log 2 = 0 - 0{\cdot}3010 = -0{\cdot}3010$ (ଉତ୍ତର)

(ii) $\log\frac{1}{3} = \log 1 - \log 3 = 0 - 0{\cdot}4771 = -0{\cdot}4771$ (ଉତ୍ତର)

(iii) $\log 0{\cdot}4 = \log\frac{4}{10} = \log 4 - \log 10 = \log 2^2 - \log 10$

$= 2 \log 2 - \log 10 = (2 \times 0{\cdot}3010) - 1 = 0{\cdot}6020 - 1 = -0{\cdot}3980$ (ଉତ୍ତର)

(iv) $\log (0.0028) = \log \frac{28}{10^4} = \log 28 - \log 10^4$

$= \log (2^2 \times 7) - 4 \log 10 = 2 \log 2 + \log 7 - 4 \times 1$

$= 2 \times 0{\cdot}3010 + 0{\cdot}8451 - 4 = -2{\cdot}5529$ (ଉତ୍ତର)

ମନେରଖ : ଉଦାହରଣ-13କୁ ଲକ୍ଷ୍ୟକଲେ ଆମେ ଜାଣିପାରିବା ଯେ,

ଯଦି $0 < y < 1$ ହୁଏ, ତେବେ $\log y$ର ମାନ ଋଣାତ୍ମକ ହେବ।

3.11 ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାର ଲଗାରିଦମ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ଲଗ୍‌ଟେବୁଲ୍ ବ୍ୟବହାର କରି ଯେ କୌଣସି ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାର ଲଗାରିଦମ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିହେବ। ଯଦି ସଂଖ୍ୟାଟି 10^n (n ଧନାତ୍ମକ ବା ଋଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା) ତେବେ ସଂଖ୍ୟାଟିର ସାଧାରଣ ଲଗାରିଦମ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ଖୁବ୍ ସହଜ। କାରଣ

$\log 10 = 1$, $\log 100 = \log 10^2 = 2$, $\log (10000) = \log 10^4 = 4$,

$\log 0{\cdot}1 = \log (10^{-1}) = -1$, $\log (0{\cdot}001) = \log 10^{-3} = -3$ ଇତ୍ୟାଦି।

ଅର୍ଥାତ୍ ସଂଖ୍ୟା $x = 10^n$ $(n \in Z)$ ହେଲେ $\log x = n$ ହେବ।

ତେଣୁ ଯେକୌଣସି ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାର ସାଧାରଣ ଲଗାରିଦମ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପୂର୍ବରୁ ତାକୁ ପ୍ରଥମେ ମାନକରୂପ(standard form)ରେ ପରିଣତ କରିବାକୁ ହେବ।

ସଂଜ୍ଞା :

ଯଦି x ଏକ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା, ତେବେ xର ମାନକରୂପ ହେଉଛି, $x = \alpha \times 10^n$ ଯେଉଁଠାରେ $1 \le \alpha < 10$ ଓ ଘାତାଙ୍କ n ହେଉଛି ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ।

ମାନକ ରୂପ ନିର୍ଣ୍ଣୟର ସାଧାରଣ ପଦ୍ଧତି :

(1) ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା x ର ଦଶମିକ ରୂପରେ ଦଶମିକ ବିନ୍ଦୁର ଅବସ୍ଥାନ ଲକ୍ଷ୍ୟକର। ଦଶମିକ ବିନ୍ଦୁକୁ ଏଭଳି ଭାବରେ ବାମ ବା ଡାହାଣକୁ ଘୁଞ୍ଚାଅ ଯେପରି ବିନ୍ଦୁଟିର ପୁନଃସଂସ୍ଥାପନ ପରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ଦଶମିକ ସଂଖ୍ୟା 1 ଠାରୁ ବଡ଼ ବା 1 ସହିତ ସମାନ ହେବ; ମାତ୍ର 10 ଠାରୁ ବଡ଼ ହେବ ନାହିଁ। ବିନ୍ଦୁଟିକୁ ଏପରି ଘୁଞ୍ଚାଇ ଲେଖିବା ପରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ସଂଖ୍ୟାଟି ହେଉଛି ମାନକ ରୂପ $1\,\alpha \times 10^n$ ରେ 'α'ର ମୂଲ୍ୟ।

(2) n ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା x, 1 ଠାରୁ ସାନ କିମ୍ବା ସାନ ନୁହେଁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର।

(a) ଯଦି $x < 1$ ହୁଏ, ତେବେ n = –(xର ଦଶମିକ ପ୍ରକାଶରେ ଦଶମିକ ବିନ୍ଦୁର ଠିକ୍ ପରବର୍ତ୍ତୀ ଶୂନ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା + 1)

(b) ଯଦି $x > 1$ ହୁଏ, ତେବେ n = xର ଦଶମିକ ପ୍ରକାଶରେ ଦଶମିକ ବିନ୍ଦୁର ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ଅଙ୍କସଂଖ୍ୟା – 1

ଉଦାହରଣ - 14 :

ନିମ୍ନଲିଖିତ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ମାନକରୂପ ଲେଖ।

(i) 3·123 (ii) 40·7265 (iii) 312300 (iv) 0·003123 (v) 0·57123

ସମାଧାନ :

(i) $3{\cdot}123 = 3{\cdot}123 \times 10^0$ $(\alpha = 3{\cdot}123,\ n = 0)$

(ii) $40{\cdot}7265 = 4{\cdot}07265 \times 10^1$ $(\alpha = 4{\cdot}07265,\ n = 1)$

(iii) $312300 = 3{\cdot}123 \times 10^5$ $(\alpha = 3{\cdot}123,\ n = 5)$

(iv) $0{\cdot}003123 = 3{\cdot}123 \times 10^{-3}$ $(\alpha = 3{\cdot}123,\ n = -3)$

(v) $0{\cdot}57123 = 5{\cdot}7123 \times 10^{-1}$ $(\alpha = 5{\cdot}7123,\ n = -1)$

ସୂଚନା : ଉଦାହରଣ 14ର ପ୍ରତ୍ୟେକର ପ୍ରଶ୍ନୋତ୍ତରକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟକଲେ ଜାଣିପାରିବ ଯେ α ର ମୂଲ୍ୟ 1 ଠାରୁ 10 ମଧ୍ୟରେ ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା $(1 \le \alpha < 10)$ ଏବଂ n ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା।

3.12. ସାଧାରଣ ଲଗାରିଦମ୍‌ର କ୍ୟାରାକ୍ଟରିଷ୍ଟିକ୍ ଓ ମାଣ୍ଟିସା (Characteristic and Mantissa of a common logarithm) :

ମନେକର x ଏକ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ ମାନକରୂପରେ $x = \alpha \times 10^n$।

$\therefore \log x = \log(\alpha \times 10^n) = \log \alpha + \log 10^n = \log \alpha + n \log 10 = n + \log \alpha$

ସଂଜ୍ଞା : n ଓ log α କୁ ଯଥାକ୍ରମେ log xର କ୍ୟାରାକ୍ଟରିଷ୍ଟିକ୍ ଓ ମାଣ୍ଟିସା କୁହାଯାଏ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ $\log (198.6) = \log (1{\cdot}986 \times 10^2) = \log 1{\cdot}986 + \log 10^2$

$= 2 + \log 1{\cdot}986$

$\therefore$ log 198·6ରେ କ୍ୟାରାକ୍ଟରିଷ୍ଟିକ୍ = 2 ଓ ମାଣ୍ଟିସା = log 1·986

ସେହିପରି log 20ର କ୍ୟାରାକ୍ଟରିଷ୍ଟିକ୍ ହେଉଛି 1 ଓ ମାଣ୍ଟିସା ହେଉଛି log 2 = 0·3010।

ମନେରଖ :

log xର କ୍ୟାରାକ୍ଟରିଷ୍ଟିକ୍ ସର୍ବଦା ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା (ଧନାତ୍ମକ ବା ଋଣାତ୍ମକ); କିନ୍ତୁ ମାଣ୍ଟିସା logα ର ମୂଲ୍ୟ 0 କିମ୍ବା 0 ଓ 1 ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ କୌଣସି ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା।

କାରଣ $1 \le \alpha < 10 \Rightarrow \log 1 \le \log \alpha < \log 10 \Rightarrow 0 \le \log \alpha < 1$

ମାନକରୂପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ସୂତ୍ରାନୁଯାୟୀ α ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି logα ର ମାନ ଲଗ୍ ଟେବୁଲ୍ ଦେଖି ନିରୂପଣ କରାଯାଏ।

ମାଣ୍ଟିସାର ବିଶେଷ ଧର୍ମ : ଗୋଟିଏ ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟାର ଦଶମିକ ପରିପ୍ରକାଶ (decimal expression) ରେ ଥିବା ଅଙ୍କ ଓ ସେମାନଙ୍କ କ୍ରମରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ ନ ହୋଇ ଯଦି କେବଳ ଦଶମିକ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ ହୋଇଯାଏ, ତେବେ ଉତ୍ପନ୍ନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଲଗାରିଦମ୍‌ଗୁଡ଼ିକର କେବଳ କ୍ୟାରାକ୍ଟରିଷ୍ଟିକ୍ ବଦଳେ, କିନ୍ତୁ ମାଣ୍ଟିସା ଅପରିବର୍ତ୍ତିତ ରହେ।

ଏହି ପରିପ୍ରେକ୍ଷୀରେ ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣଟିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟକର।

ଉଦାହରଣ - 15 :

ନିମ୍ନ ଲଗାରିଦମ୍‌ଗୁଡ଼ିକର କ୍ୟାରାକ୍ଟରିଷ୍ଟିକ୍ ଓ ମାଣ୍ଟିସା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(i) log 198.6 (ii) log 19.86 (iii) log 0.1986 (iv) log 0.01986

ସମାଧାନ :

(i) $\log 198.6 = \log (1.986 \times 10^2) = 2 + \log 1.986$

$\therefore$ କ୍ୟାରାକ୍ଟରିଷ୍ଟିକ୍ = 2 ଓ ମାଣ୍ଟିସା = log 1·986

(ii) $\log 19{\cdot}86 = \log (1{\cdot}986 \times 10^1) = 1 + \log 1{\cdot}986$

$\therefore$ କ୍ୟାରାକ୍ଟରିଷ୍ଟିକ୍ = 1 ଓ ମାଣ୍ଟିସା = log 1·986

(iii) $\log (0{\cdot}1986) = \log (1{\cdot}986 \times 10^{-1}) = -1 + \log 1{\cdot}986$

$\therefore$ କ୍ୟାରାକ୍ଟରିଷ୍ଟିକ୍ = –1 ଓ ମାଣ୍ଟିସା = log 1·986

(iv) $\log (0{\cdot}01986) = \log (1{\cdot}986 \times 10^{-2}) = -2 + \log 1{\cdot}986$

$\therefore$ କ୍ୟାରାକ୍ଟରିଷ୍ଟିକ୍ = –2 ଓ ମାଣ୍ଟିସା = log 1·986 (ଉତ୍ତର)

ଏ ସମସ୍ତ କ୍ଷେତ୍ରରେ ମାଣ୍ଟିସା ସମାନ ରହି କ୍ୟାରାକ୍ଟରିଷ୍ଟିକ୍ ବଦଳିଯାଉଛି। ତେଣୁ କୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା xର ଲଗାରିଦମ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲାବେଳେ କେବଳ log xର ମାଣ୍ଟିସା logα ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ ଲଗ୍‌ଟେବୁଲ୍‌ର ବ୍ୟବହାର କରାଯାଇଥାଏ।

3.13. ଲଗ୍ ସାରଣୀ ବ୍ୟବହାର : ମାଣ୍ଟିସାର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ ପାଇଁ ଲଗ୍ ସାରଣୀ କିପରି ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ ତାହା ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ହେବ।

ଉଦାହରଣ – 16 : ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

(i) log 250·7 (ii) log 2 (iii) log 0·005928

ସମାଧାନ :

(i) ମାନକରୂପରେ $250{\cdot}7 = 2{\cdot}507 \times 10^2 \Rightarrow \log 250{\cdot}7 = \log (2{\cdot}507 \times 10^2) = 2 + \log 2{\cdot}507$

ମାଣ୍ଟିସା log 2·507ର ମୂଲ୍ୟ ଜାଣିବା ପାଇଁ ଆମେ ଲଗ୍ ସାରଣୀ ବ୍ୟବହାର କରିବା। ବହିରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ଲଗ୍ ସାରଣୀ ଦେଖ। ସାରଣୀର ବାମରୁ ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭରେ 25 ସଂଖ୍ୟାଟିକୁ ଦେଖ। ଏହି ସଂଖ୍ୟା 25ର ଡାହାଣ ପାଖକୁ ଗୁଡ଼ିଏ ଚାରି ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ଧାଡ଼ି ହୋଇ ଥିବାର ଦେଖିବାକୁ ପାଇବ। ସେଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ 3979, 3997, 4014 ଇତ୍ୟାଦି। ଧାଡ଼ିର ପ୍ରତ୍ୟେକ ସଂଖ୍ୟା ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ସ୍ତମ୍ଭରେ ରହିଛି। ଏପରି ସମୁଦାୟ ଦଶଟି ସ୍ତମ୍ଭ ରହିଛି ଓ ସ୍ତମ୍ଭଗୁଡ଼ିକ ସାରଣୀର ଶୀର୍ଷ ଭାଗରେ 0 ରୁ 9 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଅଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନିତ ହୋଇଛି। ସ୍ତମ୍ଭର ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ଦଶମିକ ବିନ୍ଦୁ ଯୁକ୍ତ ନ ହୋଇଥିଲେ ମଧ୍ୟ ଏମାନଙ୍କୁ ଦଶମିକ ବିନ୍ଦୁ ପରେ ଚାରିସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଆସନ୍ନମାନ ବୋଲି ବୁଝିବାକୁ ହେବ। ଏହି ଦଶଟି ସ୍ତମ୍ଭର ଡାହାଣକୁ ଅଳ୍ପ ବ୍ୟବଧାନରେ ଆଉ ନଅଗୋଟି ସ୍ତମ୍ଭ ରହିଛି। ଏହି ସ୍ତମ୍ଭଗୁଡ଼ିକ 'MEAN DIFFERENCES' ବୋଲି ନାମିତ ହୋଇ ଶୀର୍ଷ ଭାଗରେ 1 ରୁ 9 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଅଙ୍କଦ୍ୱାରା ଚିହ୍ନିତ ହୋଇଛି। ଏହି ସ୍ତମ୍ଭମାନଙ୍କରେ ଥିବା ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ସ୍ଥଳବିଶେଷରେ ଏକ ଅଙ୍କ ଓ ସ୍ଥଳ ବିଶେଷରେ ଦୁଇ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ହେଲେ ମଧ୍ୟ ଏମାନଙ୍କର ବାମପାର୍ଶ୍ୱକୁ ଆବଶ୍ୟକ ସଂଖ୍ୟକ ଶୂନ ବସାଇ ଆରମ୍ଭରେ ଦଶମିକ ବିନ୍ଦୁ ଦେବାକୁ ହେବ।

ଆମର ସଂଖ୍ୟା 2·507ରେ ଅଙ୍କଗୁଡ଼ିକର କ୍ରମ 2507 ହୋଇଥିବାରୁ ଆମେ ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭର 25କୁ ଠାବ କଲେ। 25ର ଡାହାଣକୁ 0 ଚିହ୍ନିତ ସ୍ତମ୍ଭସ୍ଥ ସଂଖ୍ୟା 3979 ଅର୍ଥାତ୍ ·3979ଅଟେ। ତତ୍‌ପରେ ସେହି ଧାଡ଼ିରେ (ଅର୍ଥାତ୍ 3979, 3997, 4014- ଏମାନଙ୍କର ଧାଡ଼ିରେ) MEAN DIFFERENCES ର 7-ଚିହ୍ନିତ ସ୍ତମ୍ଭସ୍ଥ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଦେଖ। ଏହା 12 ଅର୍ଥାତ୍ ·0012 ଅଟେ। ଆମେ ପାଇଥିବା ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ଅର୍ଥାତ୍ ·3979 ଓ ·0012ର ଲଗ୍ ସାରଣୀରେ ଅବସ୍ଥିତି ନିମ୍ନରେ ଦେଖାଇ ଦିଆଗଲା।

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	MEAN DIFFERENCES								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
10																			
–																			
–																			
–																			
25	3979	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	12	-	-

ବର୍ତ୍ତମାନ ଲଗ୍ ସାରଣୀରୁ ପାଇଥିବା ଉଭୟ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଯୋଗ କରି ଆବଶ୍ୟକ ମାଣ୍ଟିସାର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେବ। ତେଣୁ ମାଣ୍ଟିସା log 2·507ର ମାନ ନିମ୍ନମତେ ନିରୂପିତ ହେଲା :

(i) log 2·507 = ·3979 + ·0012 = ·3991 ବା 0·3991 ଏହା ହେଉଛି ଦଶମିକ ଚାରିସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ log 2·507ର ଆସନ୍ନମାନ। ତେଣୁ log 250·7 = 2 + log 2·507 = 2·3991 (ଉତ୍ତର)

(ii) $\log 2 = \log (2 \times 10^0) = 0 + \log 2$

(2 = 2·0 ନେଇ ସୂତ୍ରାନୁଯାୟୀ ତୁମେ କ୍ୟାରାକ୍ଟରିଷ୍ଟିକ୍ = 0 ଓ ମାଣ୍ଟିସା = log 2 ବା log 2·0 ଲେଖିପାର)

ଲଗ୍ ସାରଣୀରେ ତୁମେ ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭରେ 2 ଦେଖିବାକୁ ପାଇବ ନାହିଁ। ମାତ୍ର 2 = 2·00 ହୋଇଥିବାରୁ ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭରେ 20କୁ ଦେଖ। (ଏହି କାରଣରୁ ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭରେ 1 ଠାରୁ 9 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସଂଖ୍ୟା ନଥାଏ) 20ର ଡାହାଣ ପାଖକୁ 0 ଚିହ୍ନିତ ସ୍ତମ୍ଭରେ ଥିବା ସଂଖ୍ୟା 3010 ଅର୍ଥାତ୍ ·3010 ଅଟେ। ଏଠାରେ MEAN DIFFERENCES ସ୍ତମ୍ଭଗୁଡ଼ିକୁ ଯିବା ଦରକାର ନାହିଁ। 2·00 ଅର୍ଥାତ୍ 2·000ର ଦଶମିକ ବିନ୍ଦୁପରେ ତୃତୀୟ ସ୍ଥାନରେ ଅଣଶୂନ୍ୟ ଅଙ୍କ ଥିଲେ ସେପରି କରିଥାଆନ୍ତେ। ତେଣୁ log 2 = 0·3010 (ଉତ୍ତର)

(iii) $\log 0{\cdot}005928 = \log (5{\cdot}928 \times 10^{-3}) = -3 + \log 5{\cdot}928$

$= -3 + {\cdot}7723 + {\cdot}0006$ (ସାରଣୀ ଦେଖି ମୂଲ୍ୟ ବାହାରକର)

$= -3 + 0{\cdot}7729 = -2{\cdot}2271$ ବା $\bar{3}{\cdot}7729$ (ଉତ୍ତର)

ସୂଚନା :

(1) ଦତ୍ତ ସଂଖ୍ୟା 1 ଠାରୁ ସାନ ହେଲେ କ୍ୟାରାକ୍ଟରିଷ୍ଟିକ୍ ଋଣାତ୍ମକ ହେବାରୁ ଋଣାତ୍ମକ ଲଗାରିଦମ୍ ମିଳେ। $\log 0{\cdot}005928 = -2{\cdot}2271 = (-3 + 0{\cdot}7729)$, ଏପରି ଲେଖିଲେ କ୍ୟାରାକ୍ଟରିଷ୍ଟିକ୍ ଓ ମାଣ୍ଟିସା ସଂପର୍କରେ କୌଣସି ସୂଚନା ତତ୍‌କ୍ଷଣାତ୍ ମିଳେ ନାହିଁ। ତେଣୁ କ୍ୟାରାକ୍ଟରିଷ୍ଟିକ୍ ଓ ମାଣ୍ଟିସାର ମାନ ସ୍ପଷ୍ଟ ରୂପେ ସୂଚାଇବା ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟରେ ଏପରି ସ୍ଥଳେ $\log 0{\cdot}005928 = \bar{3}{\cdot}7729$ – ଏପରି ଲେଖାଯାଏ। ଏଠାରେ $\bar{3}{\cdot}7729$ ଅର୍ଥ $-3 + 0{\cdot}7729$ ଅଟେ। ମାତ୍ର $\log 0{\cdot}005928 = -2{\cdot}2271$ ଲେଖିବା ଭୁଲ ନୁହେଁ।

(2) ବହିରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ଲଗ୍‌ସାରଣୀ ଚାରିଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ [log 1·000 ରୁ log 9·999 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ] ମାଣ୍ଟିସା ଗୁଡ଼ିକର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପାଇଁ ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ। ଅଧିକ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ ଦଶମିକ ବିନ୍ଦୁପରେ ଆବଶ୍ୟକ ସଂଖ୍ୟକ ସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଆସନ୍ନମାନ ନେଇ ସାରଣୀ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଇପାରେ; କାରଣ ଏପରି ଅବସ୍ଥା ପାଇଁ ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିଶେଷ ନିୟମ (Principle of proportional parts) ଆଲୋଚନା ପରିସରଭୁକ୍ତ ନୁହେଁ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3(f)

ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(i) $\log 10000$ (ii) $\log \sqrt{10}$ (iii) $\log 0{\cdot}0001$

(iv) $\log \frac{1}{\sqrt{10}}$ (v) $10^{\log 100}$ (vi) $10^{2\log 5}$

2. $\log 2 = 0{\cdot}3010$, $\log 3 = 0{\cdot}4771$, $\log 7 = 0{\cdot}8451$, $\log 11 = 1{\cdot}0414$ ଏହି ମୂଲ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ଲଗାରିଦମ୍‌ର ଆସନ୍ନମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(i) 20 (ii) 300 (iii) 7000 (iv) $\frac{1}{20}$ (v) $\frac{1}{3}$ (vi) $\frac{1}{70}$

(vii) 0.0011 (viii) 0·6 (ix) 3·5 (x) 0·0084 (xi) $3^{\frac{1}{10}}$ (xii) 77

3. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ମାନକରୂପ ଲେଖ ଏବଂ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସଂଖ୍ୟାର ଲଗାରିଦମ୍‌ର କ୍ୟାରାକ୍ଟରିଷ୍ଟିକ୍ କେତେ ହେବ ଲେଖ।

(i) 76085 (ii) 3123 (iii) 0·577215 (iv) 0·00023 (v) 198·6

(vi) 1 (vii) 0·002902 (viii) 0·03010 (ix) 1428·57 (x) 294·2

4. ବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରୁ ସଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛ।

(i) log 29·42ର କ୍ୟାରାକ୍ଟରିଷ୍ଟିକ୍ କେତେ ? (–1, 1, –2, 2)

(ii) log 0·001ର କ୍ୟାରାକ୍ଟରିଷ୍ଟିକ୍ କେତେ ? (–3, 0, 1, 3)

(iii) log 290200 – log 0·002902 କି ପ୍ରକାର ସଂଖ୍ୟା ?
(ଶୂନ, ଦଶମିକ ସଂଖ୍ୟା, ଋଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା, ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା)

(iv) log 2ର ମାନ ବ୍ୟବହାର କରି କାହାର ଲଗାରିଦମ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିହେବ ? (4·4, 22, 60, 0·032)

(v) log 2ର ମାନ 0·3010 ହେଲେ log 2000ର ମାନ କେତେ ?
(3010, 301·0, 3·3010, –3·3010)

5. ସାରଣୀ ଦେଖି ଦତ୍ତ ରାଶିଗୁଡ଼ିକର ସାଧାରଣ ଲଗାରିଦମ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(i) 107, (ii) 401, (iii) 2.518, (iv) 0.3456, (v) 0.00005772

6. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\log_{10}2$ ର ମାନ $\frac{3}{10}$ ଓ $\frac{4}{13}$ ମଧ୍ୟରେ ରହିବ।

7. $\log_{1000}2$ ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ଯେତେବେଳେ $\log_{10}2$ ର ମାନ 0.3010 ।

3.14. ଆଣ୍ଟିଲଗାରିଦମ୍ (Antilogarithm) :

ମନେକର $\log x = y$ ($x > 0$ ଓ $y \in R$; ଲଗାରିଦମ୍‌ର ଆଧାର 10)। ଏହା ଗୋଟିଏ ଲଗାରିଦମୀୟ ସମୀକରଣ (Logarithmic equation)। ଆମେ x ଓ y ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରିବାକୁ ଯାଇ କହିବା $x = \text{antilog } y$. ତେଣୁ $y = \log x \Rightarrow x = \text{antilog } y$ ଏବଂ $x = \text{antilog } y \Rightarrow y = \log x$

ସଂଜ୍ଞା : $x = \textit{antilog } y \Leftrightarrow y = \log x$

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 :

(i) $\log(\text{antilog } x) = x;\ \ x \in R$ (ii) $\text{antilog}(\log x) = x;\ x > 0$

ପ୍ରମାଣ : (i) antilog $x = y$ (ମନେକର)

$\Rightarrow \log y = x$ (ସଂଜ୍ଞା) $\Rightarrow \log(\text{antilog } x) = x$ ($\because$ antilog $x = y$) (ପ୍ରମାଣିତ)

(ii) $\log x = z$ (ମନେକର)

$\Rightarrow$ antilog $z = x$ (ସଂଜ୍ଞା) $\Rightarrow$ antilog $(\log x) = x$ ($\because z = \log x$) (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 : antilog $x = 10^x$; $x \in R$

ପ୍ରମାଣ : antilog $x = y$ (ମନେକର)

$\Rightarrow \log y = x$ (ସଂଜ୍ଞା) $\Rightarrow y = 10^x$ (ସାଧାରଣ ଲଗାରିଦମ୍‌ର ସଂଜ୍ଞା)

$\Rightarrow$ antilog $x = 10^x$ ($\because$ antilog $x = y$) (ପ୍ରମାଣିତ)

ମନ୍ତବ୍ୟ :

(1) ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 ରୁ ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ ଲଗାରିଦମ୍ ନିରୂପଣ ଓ ଆଣ୍ଟିଲଗାରିଦମ୍ ନିରୂପଣ - ଏ ଉଭୟ ପରସ୍ପରର ବିପରୀତ ପ୍ରକ୍ରିୟା।

(2) $\log x$ ଅର୍ଥପୂର୍ଣ୍ଣ ହେବା ପାଇଁ $x > 0$ ହେବା ଦରକାର, ମାତ୍ର x ଯେ କୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ ମଧ୍ୟ antilog x ଅର୍ଥପୂର୍ଣ୍ଣ ହୁଏ ଓ ଏହା ସର୍ବଦା ଧନାତ୍ମକ, କାରଣ antilog $x = 10^x$ (ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ 2) ଓ 10^x ($x \in R$) ସର୍ବଦା ଧନାତ୍ମକ)।

ଆଣ୍ଟିଲଗ୍ ସାରଣୀର ସାହାଯ୍ୟ ନେଇ ଗୋଟିଏ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାର ଆଣ୍ଟିଲଗାରିଦମ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ। ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା x ମାନକରୂପରେ $\alpha \times 10^n$ ହେଲେ ତୁମେ ଜାଣ ଯେ, $\log x = n + \log \alpha$ ଓ ମାଣ୍ଟିସା $\log \alpha$ କୁ ଲଗ୍ ସାରଣୀରୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ। ବିପରୀତ କ୍ରମେ କ୍ୟାରାକ୍ଟରିଷ୍ଟିକ୍ n ଓ ମାଣ୍ଟିସା $\log \alpha$ ଜଣାଥିଲେ, ମାଣ୍ଟିସାରୁ α ର ମାନ ଆଣ୍ଟିଲଗ୍ ସାରଣୀ ସାହାଯ୍ୟରେ ନିରୂପିତ ହୁଏ; କାରଣ antilog $(\log \alpha) = \alpha$ ।

ମନେକର $\log x$ ର କ୍ୟାରାକ୍ଟରିଷ୍ଟିକ୍ n ଓ ମାଣ୍ଟିସା m ଆମକୁ ଜଣା ଅଛି। x ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କରିବା।

$x = \alpha \times 10^n$ (ମାନକରୂପ) ହେଲେ $\log x$ର ମାଣ୍ଟିସା $\log \alpha$ ଅଟେ। ତେଣୁ ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ $m = \log \alpha$ ଅର୍ଥାତ୍ α = antilog m

$\therefore x = \alpha \times 10^n = 10^n \times$ antilog m..................(1)

$\log x$ = କ୍ୟାରାକ୍ଟରିଷ୍ଟିକ୍ + ମାଣ୍ଟିସା $= n + m$ ($n \in Z$, $0 \le m < 1$)

$\Rightarrow x$ = antilog $(n + m)$ ....(2)

(1) ଓ (2)ରୁ ଆମେ ପାଉ,

$n \in Z$ ଓ $0 \le m < 1$ ହେଲେ antilog $(n + m) = 10^n \times$ antilog m

$0 \le m < 1$ ପାଇଁ ଆଣ୍ଟିଲଗ୍ ସାରଣୀରୁ antilog mର ମାନ ନିରୂପଣ କରି ଉପରୋକ୍ତ ସୂତ୍ର ସାହାଯ୍ୟରେ antilog $(n + m)$ ଅର୍ଥାତ୍ x ନିରୂପିତ ହୁଏ।

antilog m = α ଓ $1 \le \alpha < 10$ ହୋଇଥିବାରୁ antilog mର ଦଶମିକ ପ୍ରକାଶରେ ଦଶମିକ ବିନ୍ଦୁ ବାମକୁ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ଅଣଶୂନ୍ୟ ଅଙ୍କ (non zero digit) ରହିବ।

ଆଣ୍ଟିଲଗ୍ ସାରଣୀରୁ antilog mର ଆସନ୍ନମାନର ଅଙ୍କଗୁଡ଼ିକ ହିଁ କ୍ରମ ଅନୁସାରେ ଜଣାପଡ଼େ। ସେଥିରେ ଦଶମିକ ବିନ୍ଦୁକୁ ସ୍ଥାପନ କରିବାକୁ ହୁଏ, ଯେପରି $1 \le$ antilog m < 10 ହେବ।

3.15. ଆଣ୍ଟିଲଗ୍ ସାରଣୀର ବ୍ୟବହାର :

ଉଦାହରଣ - 17 :

ଆଣ୍ଟିଲଗ୍ ସାରଣୀ ଦେଖି ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(i) antilog 0·4771 (ii) antilog 1·0792 (iii) antilog $\bar{3}.6412$ (iv) antilog (–2·4801)

ସମାଧାନ :

(i) ଆଣ୍ଟିଲଗ୍ ସାରଣୀର ବାମରୁ ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭରେ ·47କୁ ଦେଖ। ଏହାର ଡାହାଣ ପାଖକୁ 7 ଚିହ୍ନିତ ସ୍ତମ୍ଭରେ ଥିବା ସଂଖ୍ୟା 2999 ଅଟେ। ତାହାପରେ ସେ ଧାଡ଼ିରେ ଡାହାଣକୁ MEAN DIFFERENCES ସ୍ତମ୍ଭଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ 1 ଚିହ୍ନିତ ସ୍ତମ୍ଭରେ ଥିବା ସଂଖ୍ୟାକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟକର। ସେଠାରେ 1 ଥିବାର ସାରଣୀରୁ ଦେଖିବ। ପାଇଥିବା ଉଭୟ ସଂଖ୍ୟା 2999 ଓ 1 ଯୋଗକଲେ ଆମେ ପାଇବା 2999 + 1 = 3000 ଓ ଏଥିରେ ଦଶମିକ ବିନ୍ଦୁ ସ୍ଥାପନ କରି ଆମେ antilog 0·4771ର ମାନ ପାଇବା। $1 \le$ antilog m < 10 ହେଉଥିବାରୁ ଆମକୁ 3ର ଡାହାଣକୁ ଦଶମିକ ବିନ୍ଦୁ ବସାଇବାକୁ ପଡ଼ିବ। ତେଣୁ antilog 0·4771 = 3.000 ଅର୍ଥାତ୍ 3 ଅଟେ। ∴ antilog 0.4771 = 3 (ଉତ୍ତର)

(ii) 1·0792 = n + m = 1 + 0·0792 (କ୍ୟାରାକ୍ଟରିଷ୍ଟିକ୍ n = 1 ଓ ମାଣ୍ଟିସା m = 0.0792)

ତେଣୁ ସୂତ୍ର ଅନୁଯାୟୀ antilog 1·0792 = antilog (1 + 0·0792) = $10^1 \times$ antilog 0·0792 ଅର୍ଥାତ୍ antilog ·0792 ସାରଣୀ ଦେଖି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେବ। (0·0792ରେ ଦଶମିକ ବିନ୍ଦୁର ବାମକୁ ଥିବା ଶୂନ ବିଚାରକୁ ନିଆଯାଏ ନାହିଁ। ଆମକୁ ·0792 ପାଇଁ ସାରଣୀ ଦେଖିବାକୁ ହେବ।) antilog ସାରଣୀରେ ପ୍ରଥମ ସ୍ତମ୍ଭରେ ଥିବା .07ର ଡାହାଣକୁ ସେହି ଧାଡ଼ିରେ 9 ଚିହ୍ନିତ ସ୍ତମ୍ଭରେ ଥିବା ସଂଖ୍ୟା = 1199 ଓ ସେହି ଧାଡ଼ିରେ MEAN DEFERENCES ର 2 ଚିହ୍ନିତ ସ୍ତମ୍ଭରେ ଥିବା ସଂଖ୍ୟା 1 ଅଟେ। 1199 + 1 = 1200 ଏବଂ ଦଶମିକ ବିନ୍ଦୁ ବସାଇ ଆମେ ପାଇବା antilog 0·0792 = 1.2

ତେଣୁ antilog 1·0792 = $10^1 \times$ antilog 0·0792 = 10 × 1·2 = 12 (ଉତ୍ତର)

(iii) antilog $\bar{3}.6412$ = antilog (–3 + 0·6412)

= $10^{-3} \times$ antilog 0·6412 = $10^{-3} \times 4{\cdot}377$ = 0·004377 (ଉତ୍ତର)

(ସାରଣୀ ଦେଖି 0·6412 ର antilog ସ୍ଥିର କର)

(iv) –2·4801 = –(2 + 0·4801) = –2 –0·4801

ଆଣ୍ଟିଲଗ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ଆମକୁ –2·4801କୁ n + m ($n \in Z$, $0 \le m < 1$) ଆକାରରେ ପ୍ରକାଶ କରିବାକୁ ପଡ଼ିବ; କାରଣ –0·4801 ଗୋଟିଏ ମାଣ୍ଟିସା ନୁହେଁ। ତେଣୁ ପ୍ରଥମେ ଦଶମିକ ଅଂଶକୁ ଧନାତ୍ମକ ଭାବରେ ଲେଖିବାକୁ ପଡ଼ିବ।

ସୁତରାଂ, $-2{\cdot}4801 = -2 - 1 + 1 - 0{\cdot}4801 = -3 + 0{\cdot}5199 = \bar{3}{\cdot}5199$

ତେଣୁ antilog (-2.4801) = antilog $(-3 + 0.5199)$

$= 10^{-3} \times$ antilog $0.5199 = 10^{-3} \times 3.311 = 0.003311$ (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ – 3(g)

1. ମୂଲ୍ୟ କେତେ ?

   (i) antilog 2 (ii) antilog (log 3) (iii) log (antilog 5)

2. ଯେଉଁଟି ସମ୍ଭବ, ତା ପାଇଁ 'T', ଯେଉଁଟି ଅସମ୍ଭବ, ତା ପାଇଁ 'F' ଲେଖ।

   (i) $\log x < 0;\ 0 < x < 1$ (ii) $\log x = 0,\ x > 0$

   (iii) antilog $x < 0,\ x \in R$ (iv) antilog $x = 0,\ x \in R$

3. $n + m$ ଆକାରରେ ପ୍ରକାଶ କର, ଯେଉଁଠାରେ $n \in Z$ ଏବଂ $0 \le m < 1$।

   (i) $-2{\cdot}7361$ (ii) $-0{\cdot}621$ (iii) $6{\cdot}732$ (iv) $-3{\cdot}4061$ (v) $\bar{2}{\cdot}6257$

4. antilog $0{\cdot}6445 = 4{\cdot}411$ ହେଲେ, ନିମ୍ନସ୍ଥ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଆଣ୍ଟିଲଗାରିଦମ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

   (i) $1{\cdot}6445$ (ii) $\bar{2}{\cdot}6445$ (iii) $-2{\cdot}3555$

5. ଯଦି antilog $(\bar{2}.3997) = 0.0251$ ହୁଏ, ତେବେ ନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଆଣ୍ଟିଲଗାରିଦମ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

   (i) $\bar{4}.3997$ (ii) 0.3997 (iii) 2.3997 (iv) $\bar{1}.3997$

6. ଆଣ୍ଟିଲଗ୍ ସାରଣୀ ଦେଖି ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

   (i) antilog $0{\cdot}3825$ (ii) antilog $1{\cdot}8983$

   (iii) antilog $\bar{2}{\cdot}6045$ (iv) antilog $(-1{\cdot}3955)$

7. ନିମ୍ନରେ କେତେକ ସଂଖ୍ୟାର ଲଗାରିଦମ୍ ଦିଆଯାଇଛି। ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ସ୍ଥିର କର।

   (i) 2.415 (ii) $\bar{1}.1598$ (iii) 0.6446 (iv) 3.9525 (v) 1.0073

3.16. ଲଗାରିଦମ୍‌ର ପ୍ରୟୋଗ (Applications of Logarithm) :

ଲଗାରିଦମ୍ ଓ ଆଣ୍ଟିଲଗାରିଦମ୍‌ର ପ୍ରୟୋଗ କରି ଗୁଣନ, ହରଣ, ଘାତ ନିରୂପଣ ତଥା ମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ, ସହଜରେ କରାଯାଇପାରେ। ଏହା ବ୍ୟତୀତ ସମୂଳସୁଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ, ଜନସଂଖ୍ୟା ହିସାବ, ଘାତାଙ୍କୀୟ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ଇତ୍ୟାଦି ଲଗାରିଦମ୍ ସାହାଯ୍ୟରେ ମଧ୍ୟ କରାଯାଇଥାଏ। ତେବେ ଏହିସବୁ ହିସାବରେ ଉତ୍ତରଟି ସଠିକ୍ ନହୋଇ ଆସନ୍ନମାନ ହୋଇଯାଏ।

[ସୂଚନା : ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକ log 2, log 3, log 7, log 10....ଇତ୍ୟାଦି ମଧ୍ୟରେ ସୀମିତ ରହିବ।]

ଉଦାହରଣ - 18 :

4^{15} ସଂଖ୍ୟାଟିରେ କେତୋଟି ଅଙ୍କ ଅଛି, ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ :

$\log 4^{15} = 15 \log 4 = 15 \log 2^2 = 30 \log 2 = 30 \times 0{\cdot}3010 = 9{\cdot}03$

ଯେହେତୁ $\log 4^{15}$ର କ୍ୟାରାକ୍ଟରିଷ୍ଟିକ୍ 9, ତେଣୁ ଦତ୍ତ ସଂଖ୍ୟାଟିରେ 9 + 1 = 10ଟି ଅଙ୍କ ଅଛି।

(ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 19 : ସମାଧାନ କର $2^x = 3$

ସମାଧାନ :

$$2^x = 3 \Rightarrow \log 2^x = \log 3 \Rightarrow x \log 2 = \log 3 \Rightarrow x = \frac{\log 3}{\log 2} \quad \text{.............(i)}$$

$\therefore x = \dfrac{0{\cdot}4771}{0{\cdot}3010} = 1.585$ (ଆସନ୍ନମାନ) (ଉତ୍ତର)

ବିକଳ୍ପ ସମାଧାନ : (i)ରୁ ପାଇବା $\log x = \log 4.771 - \log 3.010 = 0.6786 - 0.4786 = 0.2000$

$\therefore \quad x = \text{antilog } (0.2000) = 1.583$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 20 :

ସମାଧାନ କର $5^{5-3x} = 2^{x+3}$

ସମାଧାନ :

$$5^{5-3x} = 2^{x+3} \Rightarrow \log 5^{5-3x} = \log 2^{x+3}$$

$$\Rightarrow (5-3x) \log 5 = (x+3) \log 2 \Rightarrow (5-3x) \log \frac{10}{2} = (x+3) \log 2$$

$$\Rightarrow (5-3x)[1-\log 2] = (x+3) \log 2 \Rightarrow 5-3x = (5-3x+x+3) \log 2$$

$$\Rightarrow 5-3x = (8-2x) \log 2 \Rightarrow x(3-2\log 2) = 5 - 8 \log 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{5-8\log 2}{3-2\log 2} = \frac{5-8\times 0{\cdot}3010}{3-2\times 0{\cdot}3010} = \frac{5-2.4080}{3-0.6020} = \frac{2.5920}{2.3980} \text{.......(i)}$$

$= 1.081$ (ଆସନ୍ନମାନ) (ଉତ୍ତର)

ବି.ଦ୍ର. : (i) ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ଲଗାରିଦମ୍ ନେଲେ ପାଇବା $\log x = \log 2.592 - \log 2.398$

$= 0.4136 - 0.3799 = 0.0337$

$\therefore x = \text{antilog } (.0337) = 1.081$(ଆସନ୍ନମାନ) (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 21 :

ବାର୍ଷିକ 5% ହାର ସୁଧରେ କେତେ ବର୍ଷରେ ଏକ ମୂଳଧନର ସମୂଳସୁଧ ଦ୍ୱିଗୁଣିତ ହେବ, ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ :

ମନେକର ମୂଳଧନ = P ଟଙ୍କା, ସୁଧର ହାର = r% ଟଙ୍କା, ବର୍ଷ ସଂଖ୍ୟା = n ତେବେ

ସମୂଳ ସୁଧ $M = P\left(1+\dfrac{r}{100}\right)^n$

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $2P = P\left(1+\dfrac{5}{100}\right)^n \Rightarrow 2 = \left(\dfrac{21}{20}\right)^n \Rightarrow n \log \dfrac{21}{20} = \log 2$

$$\Rightarrow n = \frac{\log 2}{\log 21 - \log 20} = \frac{\log 2}{\log(3\times 7) - \log(2\times 10)} = \frac{\log 2}{\log 3 + \log 7 - \log 2 - \log 10}$$

$$= \frac{0\cdot 3010}{0\cdot 4771 + 0\cdot 8450 - 0\cdot 3010 - 1} = 14.2 \text{ (ଆସନ୍ନମାନ)}$$

∴ ଦତ୍ତ ମୂଳଧନର ସମୂଳ ସୁଧ 14.2 ବର୍ଷରେ ଦ୍ୱିଗୁଣିତ ହେବ। (ଉତ୍ତର)

ସୂଚନା :

ଯଦି ଛଅମାସରେ ଥରେ ସୁଧ ହିସାବ ହେଉଥାଏ, ତେବେ $n = \frac{1}{2}$ ହେବ।

ବିଶେଷ ସୂଚନା :

ସମୂଳ ସୁଧ ସୂତ୍ରକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଜନସଂଖ୍ୟା ଆକଳନ ମଧ୍ୟ କରାଯାଇପାରେ।

ସୂତ୍ର : ଜନସଂଖ୍ୟା = P, ବାର୍ଷିକ ବୃଦ୍ଧିହାର = r% ବର୍ଷ ସଂଖ୍ୟା = n ହେଲେ,

n ବର୍ଷପରେ ଜନଂସଖ୍ୟା $= P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$

ଉଦାହରଣ - 22 :

ଆସନ୍ନମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର : (i) $\sqrt[7]{100}$ (ii) $10^{2.3}$

ସମାଧାନ :

(i) $\log(100)^{\frac{1}{7}} = \log(10)^{\frac{2}{7}} = \frac{2}{7}\log 10 = 0.2857$

$\therefore \sqrt[7]{100} = \text{antilog } (0.2857) = 1.931$ (ଉତ୍ତର)

(ii) $\log 10^{2.3} = 2.3 \log 10 = 2.3$

$\therefore 10^{2.3} = \text{antilog } (2.3) = \text{antilog } (2 + 0.300)$

$= 10^2 \times \text{antilog } 0.300 = 10^2 \times 1.995 = 199.5$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 23 :

$\frac{(15\cdot 75)^{\frac{1}{3}} \times 0\cdot 1562}{5\cdot 367}$ ର ଆସନ୍ନମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ : $\log \frac{(15\cdot 75)^{\frac{1}{3}} \times 0\cdot 1562}{5\cdot 367} = \log\left\{(15\cdot 75)^{\frac{1}{3}} \times 0\cdot 1562\right\} - \log 5\cdot 367$

$= \log(1\cdot 575)^{\frac{1}{3}} + \log\ (0\cdot 1562) - \log\ 5\cdot 367$

$= \frac{1}{3}\log(15.75\times 10) + \log\ (1\cdot 562 \times 10^{-1}) - \log\ 5\cdot 367$

$= \frac{1}{3}\log\ (1\cdot 575 + 1) + \log\ \underline{1\cdot 562 - 1} - \log\ 5\cdot 367$

$= \frac{1}{3}(0.1973 + 1) + 0.1937 - 1 - 0.7298 = (0.3991 + 0.1937) - (1 + 0.7298)$

$= 0.5928 - 1.7298 = -1.1370 = -2 + 0.8630 = \bar{2}.8630$

$\therefore \frac{(15.75)^{\frac{1}{3}} \times 0.1562}{5.367} = \text{antilog}\ (\bar{2}.8630) = \text{antilog}\ (-2 + 0.8630)$

$= 10^{-2} \times \text{antilog}\ 0.8630 = 10^{-2} \times 7.295 = 0.0729$ (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3(h)

1. 2^7, 3^{11} ଓ 7^5 ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକରେ କେତୋଟି ଲେଖାଏଁ ଅଙ୍କ ଅଛି, ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
2. ଲଗାରିଦମ୍ ବ୍ୟବହାର କରି ସମାଧାନ କର।

   (i) $3^x = 5$, (ii) $3^x = 4$, (iii) $2^x \cdot 3^{2x} = 100$, (iv) $6^{3-4x} \cdot 4^{x+5} = 8$, (v) $2^{x-3} = 5^{x-3}$
3. ବାର୍ଷିକ 4% ହାର ସୁଧରେ କେତେ ବର୍ଷରେ ଏକ ମୂଳଧନର ସମୂଳସୁଧ ଦ୍ୱିଗୁଣିତ ହେବ, ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
4. ବାର୍ଷିକ 5% ହାର ସୁଧରେ କେତେ ବର୍ଷରେ ଏକ ମୂଳଧନର ସମୂଳସୁଧ ତ୍ରିଗୁଣିତ ହେବ, ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
5. 2001 ମସିହାରେ ଏକ ନଗରୀର ଜନସଂଖ୍ୟା ଥିଲା 6.7×10^6। ଯଦି ଜନସଂଖ୍ୟା ବୃଦ୍ଧିହାର ବାର୍ଷିକ 2.5% ହୁଏ, ତେବେ 2011 ମସିହାରେ ନଗରୀଟିର ଜନସଂଖ୍ୟା କେତେ ହେବ, ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
6. ଲଗ୍ ସାରଣୀ ଓ ଆଣ୍ଟିଲଗ୍ ସାରଣୀ ବ୍ୟବହାର କରି ଆସନ୍ନମାନ ସ୍ଥିର କର।

   (i) $(0.724)^3$ (ii) $\sqrt{1.52}$ (iii) $(100)^{\frac{1}{3}}$ (iv) $\frac{17.36 \times 5.002}{4.21}$

   (v) $\frac{0.678 \times 9.01}{0.0234}$ (vi) $\sqrt[7]{\frac{1}{4.12}}$ (vii) $\frac{\sqrt{0.00271} \times \sqrt[3]{41.8}}{0.612}$
7. 1.568 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କର। $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$
8. ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 10 ସେ.ମି. ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ ସ୍ଥିର କର।

LOGARITHMS

$Log_{10}N$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	5 4	9 8	13 12	17 16	21 20	26 24	30 28	34 32	38 36
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4 4	8 7	12 11	16 15	20 18	23 22	27 26	31 29	35 33
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3 3	7 7	11 10	14 14	18 17	21 20	25 24	28 27	32 31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3 3	6 7	10 10	13 13	16 16	19 19	23 22	26 25	29 29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3 3	6 6	9 9	12 12	15 14	19 17	22 20	25 23	28 26
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3 3	6 6	9 8	11 11	14 14	7 17	20 19	23 22	26 25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3 3	6 5	8 8	11 10	14 13	16 16	19 18	22 21	24 23
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	3 3	5 5	8 8	10 10	13 12	15 15	18 17	20 20	23 22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2 2	5 4	7 7	9 9	12 11	14 14	17 16	19 18	21 21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2 2	4 4	7 6	9 8	11 11	13 13	16 15	18 17	20 19
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
											MEAN DIFFERENCES								

ADD NUMBERS IN MEAN DIFFERENCE COLUMNS

LOGARITHMS $\quad$ $Log_{10}N$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	MEAN DIFFERENCES								
											1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7066	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7235	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8288	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	8925	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	4	4
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
											MEAN DIFFERENCES								

ADD NUMBERS IN MEAN DIFFERENCE COLUMNS

ANTI-LOGARITHMS

10^x

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Differences 1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2162	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
											MEAN DIFFERENCES								

ADD NUMBERS IN MEAN DIFFERENCE COLUMNS

ANTI-LOGARITHMS 10^x

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	MEAN DIFFERENCES 1	2	3	4	5	6	7	8	9
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3971	1	2	3	4	5	5	6	7	8
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6227	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	13
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90	7945	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
											MEAN DIFFERENCES								

ADD NUMBERS IN MEAN DIFFERENCE COLUMNS