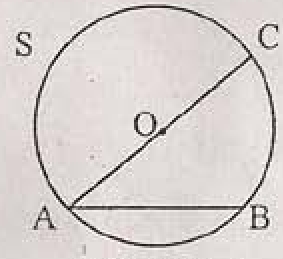
ବୃତ୍ତ
(CIRCLE)

7.1. ମୌଳିକ ଧାରଣା (Basic Concepts) :

ଆମେ ଜାଣୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଓ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ଏକ ଏକ ସେଟ୍। ବୃତ୍ତ ସେହିପରି ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ଅନ୍ୟ ଏକ ସେଟ୍।

ସଂଜ୍ଞା : ଗୋଟିଏ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ କୌଣସି ଏକ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୂରତାରେ ଉକ୍ତ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍‌କୁ ବୃତ୍ତ (Circle) କୁହାଯାଏ।

ପାର୍ଶ୍ୱଚିତ୍ର 7.1ରେ O ଏକ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ। ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୂରତା r ଏବଂ O ସହିତ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍ Sକୁ ଆମେ ଏକ ବୃତ୍ତ କହିବା। O ଠାରୁ S ଉପରିସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ r ଦୂରତାରେ ଅଛି, ଯଥା- OA = OB = OC = r। ଏଠାରେ 'O'କୁ S ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର (centre) ଏବଂ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୂରତା r କୁ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ (radius) କୁହାଯାଏ।



[ଚିତ୍ର 7.1]

ସୁତରାଂ କେବଳ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଦତ୍ତ ଥିଲେ ବୃତ୍ତଟି ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣରୂପେ ନିର୍ଣ୍ଣିତ ହୋଇଥାଏ। A, ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ $\overline{OA}$ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ମଧ୍ୟ ବୃତ୍ତର ଏକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କୁହାଯାଏ। ମନେରଖ ଯେ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ କହିଲେ ଆମେ ଉଭୟ $\overline{OA}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଓ ଏହାର ମାପକୁ ବୁଝିବା।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ :

1. ଆମର ସମସ୍ତ ଆଲୋଚନାରେ ବୃତ୍ତ ଏବଂ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁମାନେ ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବେ।
2. ଉପପାଦ୍ୟ-3ରେ ଆମେ ପ୍ରମାଣ କରିବା ଯେ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ନଥିବା ଯେ କୌଣସି ତିନିଗୋଟି ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟଦେଇ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରିବ। ତେଣୁ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ତିନୋଟି **ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱାରା ମଧ୍ୟ ବୃତ୍ତଟି ସୂଚିତ ହୁଏ । ଉପରୋକ୍ତ 'S' ବୃତ୍ତଟିକୁ 'ABC ବୃତ୍ତ' ନାମରେ ସୂଚିତ କରାଯାଇପାରିବ ।**
3. 'ABC ବୃତ୍ତ'କୁ ସାଂକେତିକ ଚିହ୍ନ 'ABC ⊙' ଦ୍ୱାରା ମଧ୍ୟ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ।

ଜ୍ୟା **(Chord) :**

ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ବୃତ୍ତର ଏକ ଜ୍ୟା କୁହାଯାଏ।

ବ୍ୟାସ **(Diameter) :**

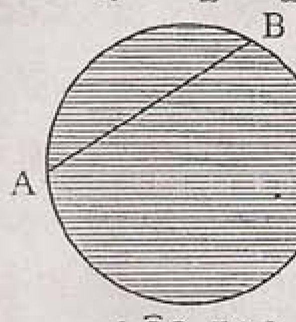
ଯେଉଁ ଜ୍ୟାରେ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଅବସ୍ଥିତ ସେହି ଜ୍ୟାକୁ ବୃତ୍ତର ଏକ ବ୍ୟାସ କୁହାଯାଏ।

ଚିତ୍ର-7.1ରେ $\overline{AB}$ S ବୃତ୍ତର ଏକ ଜ୍ୟା ଏବଂ $\overline{AC}$ ଏକ ବ୍ୟାସ ଅଟନ୍ତି। ଯେହେତୁ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ସମାନ ଦୂରରେ ଅବସ୍ଥିତ, $AO = OC = r$। ସୁତରାଂ $AC = 2r$। ଅର୍ଥାତ୍ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ଏକକ ହେଲେ ବ୍ୟାସ 2r ଏକକ ହେବ। ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବ୍ୟାସର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଅଟେ।

7.2. ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶ ଓ ବହିର୍ଦ୍ଦେଶ :

ସଂଜ୍ଞା : ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ଦୂରତା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର, ସେମାନଙ୍କୁ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ **(Interior Points)** କୁହାଯାଏ ଏବଂ ସମସ୍ତ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍‌କୁ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶ **(Interior)** କୁହାଯାଏ। ବୃତ୍ତ ଓ ଏହାର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶ ବ୍ୟତୀତ ସମତଳର ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍‌କୁ ବୃତ୍ତର ବହିର୍ଦ୍ଦେଶ **(Exterior)** କୁହାଯାଏ। ବୃତ୍ତର ବହିର୍ଦ୍ଦେଶରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ।

ଚିତ୍ର 7.2ରେ ରେଖାଙ୍କିତ ଅଂଶଟି ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶ। $\overline{AB}$ ବୃତ୍ତର ଯେ କୌଣସି ଜ୍ୟା ହେଲେ A ଓ B ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ବ୍ୟତୀତ ରେଖାଖଣ୍ଡର ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶରେ ଅବସ୍ଥିତ।



[ଚିତ୍ର 7.2]

ମନ୍ତବ୍ୟ : କୌଣସି ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶ ଏକ ଉତ୍ତଳ (Convex) ସେଟ୍।

(ଉପପାଦ୍ୟ-2 ପରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ପ୍ରଶ୍ନଟି ଦେଖ।)

ଉପପାଦ୍ୟ - 1

ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରରୁ ଏହାର ଜ୍ୟା ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ ଉକ୍ତ ଜ୍ୟାକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ। **(The perpendicular drawn from the centre of a circle to a chord bisects the chord.)**

ଦତ୍ତ : S ବୃତ୍ତରେ $\overline{AB}$ ବ୍ୟାସ ଭିନ୍ନ ଏକ ଜ୍ୟା। (ଯଦି $\overline{AB}$ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସ ହୁଏ ତେବେ କେନ୍ଦ୍ର ବିନ୍ଦୁଟି ବ୍ୟାସର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ହେବ। ସୁତରାଂ ଉପପାଦ୍ୟର ସତ୍ୟତା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ।) ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଠାରୁ $\overline{AB}$ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ $\overline{OD}$ ।

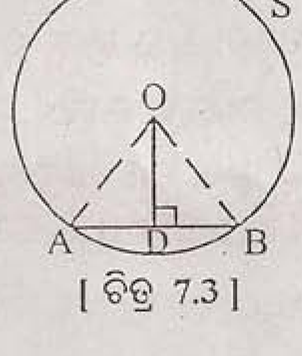
ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $AD = DB$।

ଅଙ୍କନ : $\overline{OA}$ ଓ $\overline{OB}$ ଅଙ୍କନ କର।

ପ୍ରମାଣ : ΔOAD ଏବଂ ΔOBD ମଧ୍ୟରେ

$OA = OB$ (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)

$\overline{OD}$ ସାଧାରଣ ବାହୁ।



[ଚିତ୍ର 7.3]

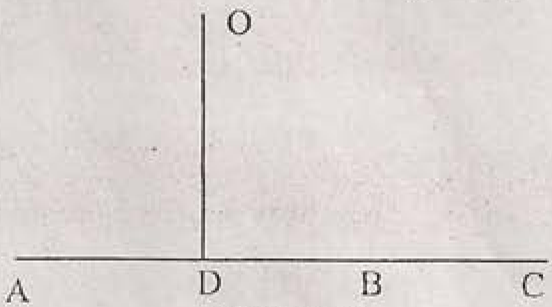
$m\angle ODA = m\angle ODB$ (ପ୍ରତ୍ୟେକେ ଏକ ସମକୋଣ)

ସୁତରାଂ $\Delta OAD \cong \Delta OBD$ (ସମକୋଣ-କର୍ଣ୍ଣ-ବାହୁ)

$\therefore AD = BD$ । (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ବୃତ୍ତକୁ ଦୁଇଟିରୁ ଅଧିକ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ନାହିଁ।

ପ୍ରମାଣ : ଯଦି ସମ୍ଭବ ହୁଏ ସରଳରେଖାଟି ବୃତ୍ତକୁ କ୍ରମାନ୍ୱୟେ A, B ଓ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରୁ। O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ $\overline{OD}$, $\overline{AB}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେଉ। ବର୍ତ୍ତମାନ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି



[ଚିତ୍ର 7.4]

ଜ୍ୟା ଏବଂ ଉପପାଦ୍ୟ-1ରୁ ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $AD = DB$ ଏବଂ $AD = DC$ । $\therefore DB = DC$ ଯାହାକି ଅସମ୍ଭବ, ଯଦି B ଓ C ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ଭିନ୍ନ ହୁଅନ୍ତି। ସୁତରାଂ ସରଳରେଖାଟି ବୃତ୍ତକୁ ଦୁଇଟିରୁ ଅଧିକ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ ନାହିଁ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 2

(ଉପପାଦ୍ୟ-1ର ବିପରୀତ)

କୌଣସି ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସ ଭିନ୍ନ ଏକ ଜ୍ୟାର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଓ କେନ୍ଦ୍ରକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡ ଉକ୍ତ ଜ୍ୟା ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ଅଟେ।

[The line-segment joining the centre of a circle to the mid-point of a chord (other than a diameter) is perpendicular to that chord.]

ଦତ୍ତ : S ବୃତ୍ତରେ $\overline{AB}$ ବ୍ୟାସ ଭିନ୍ନ ଏକ ଜ୍ୟା, O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ D, $\overline{AB}$ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\overline{OD} \perp \overline{AB}$ ।

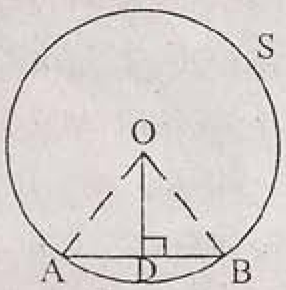
ଅଙ୍କନ : $\overline{OA}$ ଓ $\overline{OB}$ ଅଙ୍କନ କର।

ପ୍ରମାଣ : ΔOAD ଏବଂ ΔOBD ମଧ୍ୟରେ

$OA = OB$ (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)

$AD = DB$ ($\because$ D, $\overline{AB}$ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ)

$\overline{OD}$ ସାଧାରଣ ବାହୁ।



[ଚିତ୍ର 7.5]

$\therefore \Delta ADO \cong \Delta BDO$ (ବାହୁ-ବାହୁ-ବାହୁ)

$\Rightarrow m\angle ADO = m\angle BDO$ ।

କିନ୍ତୁ, $m\angle ADO + m\angle BDO = 180^\circ$ (ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ କୋଣ)

$\Rightarrow m\angle ADO = 90^\circ = m\angle BDO$

ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{OD} \perp \overline{AB}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 : ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଏହାର ଯେ କୌଣସି ଜ୍ୟାର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ। କାରଣ ଯେ କୌଣସି ଜ୍ୟାର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁଠାରେ କେବଳ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ଲମ୍ବ ଅଙ୍କିତ ହୋଇପାରିବ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 : ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଅସମାନ୍ତର ଜ୍ୟାର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରରେ ମିଳିତ ହୁଅନ୍ତି।

କାରଣ ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ-1 ଅନୁଯାୟୀ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଉଭୟ ଲମ୍ବ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ।

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ଜ୍ୟାର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ମଧ୍ୟଦେଇ ଯିବ (କାହିଁକି ?)

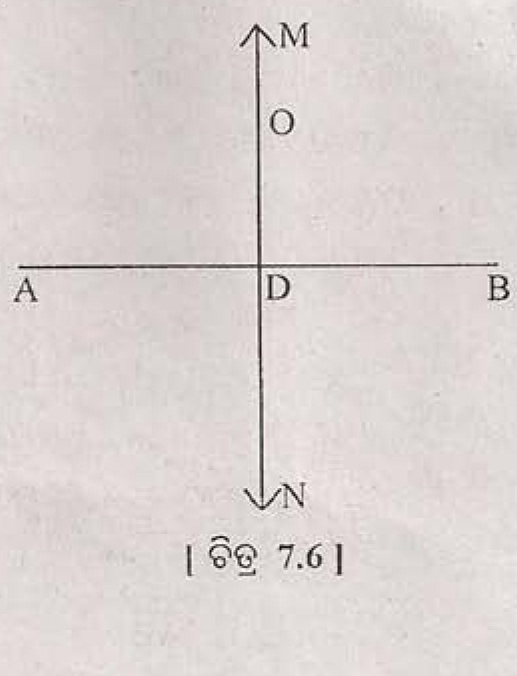
ପ୍ରଶ୍ନ-1 : ପ୍ରମାଣ କର ଯେ କୌଣସି ବୃତ୍ତରେ ଗୋଟିଏ ଜ୍ୟାର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ। (ସୂଚନା : P, $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ଉପରେ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ OP < ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ।)

ପ୍ରଶ୍ନ-2 : P ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ Q ବୃତ୍ତର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overrightarrow{PQ}$ ବୃତ୍ତକୁ ଅନ୍ୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ।

(ସୂଚନା : $\overline{OR} \perp \overrightarrow{PQ}$ ଏବଂ OR = d ହେଉ। ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ହେଲେ $\overrightarrow{PQ}$ ଉପରେ ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ S ଅଛି ଯେପରି Q-R-S କିମ୍ବା R-Q-S ଏବଂ $PR = RS = \sqrt{r^2 - d^2} \Rightarrow OS = r$)

ଆମେ ଜାଣୁ ଗୋଟିଏ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କରିବା ନିମନ୍ତେ ଆମେ ଉକ୍ତ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଅତିକମ୍‌ରେ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ଜାଣିବା ଆବଶ୍ୟକ। ଅନ୍ୟ ପକ୍ଷରେ ଦୁଇଟି ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟଦେଇ ଆମେ କେବଳ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କରିପାରିବା। ବର୍ତ୍ତମାନ ପ୍ରଶ୍ନ ଉଠେ ଯେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରିବା ନିମନ୍ତେ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଅତି କମ୍‌ରେ କେତୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଜାଣିବା ଆବଶ୍ୟକ। ଅନ୍ୟ ପକ୍ଷରେ କହିବାକୁ ଗଲେ ଅତି କମ୍‌ରେ କେତୋଟି ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟଦେଇ ଏକ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରିବ।

ଚିତ୍ର 7.6ରେ A ଓ B ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ। $\overleftrightarrow{MN}$ ରେଖାଟି D ବିନ୍ଦୁରେ $\overline{AB}$ ପ୍ରତି ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ। ଉପପାଦ୍ୟ-2 ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ-1 ଅନୁସାରେ MN ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁ O, A ଓ B ମଧ୍ୟଦେଇ ଯାଇଥିବା କୌଣସି ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେବ। ଏହା ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $\overline{AB}$ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଏକ ଜ୍ୟା ଏବଂ OA = OB = ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ହେବ। ଅର୍ଥାତ୍ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ A ଓ B ମଧ୍ୟଦେଇ ଅସଂଖ୍ୟ ବୃତ୍ତ ରହିଅଛି। ଆମେ ପରବର୍ତ୍ତୀ ସମୟରେ ପ୍ରମାଣ କରିବା ଯେ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ନିମନ୍ତେ ଅତି କମ୍‌ରେ ତିନିଗୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଆବଶ୍ୟକ।



[ଚିତ୍ର 7.6]

ଉପପାଦ୍ୟ - 3

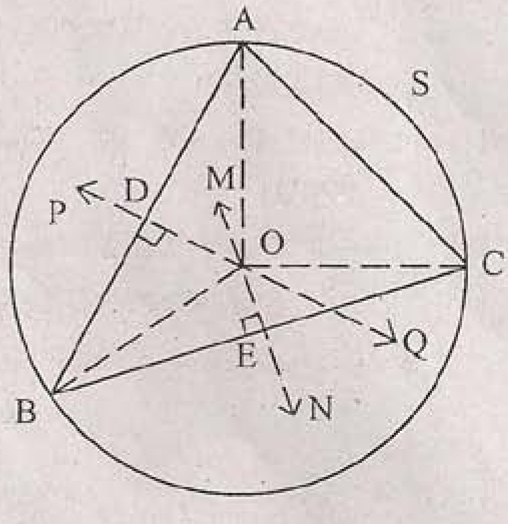
ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ନଥିବା ଯେ କୌଣସି ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟଦେଇ ଗୋଟିଏ ଏବଂ କେବଳ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରିବ।

(There is one and only one circle passing through three non-collinear points.)

ଦତ୍ତ : A, B ଓ C ଏକ ସରଳରେଖାରେ ନଥିବା ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : A, B ଓ C ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ A, B ଓ C ମଧ୍ୟଦେଇ ଅଙ୍କିତ ଏହା ଏକମାତ୍ର ବୃତ୍ତ।

ଅଙ୍କନ : $\overline{AB}$ ଓ $\overline{BC}$ ଅଙ୍କନ କର। $\overleftrightarrow{PQ}$ ଏବଂ $\overleftrightarrow{MN}$ ରେଖାଦ୍ୱୟ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{BC}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ ଲମ୍ବ ହୁଅନ୍ତୁ। ଯେହେତୁ A, B ଓ C ଏକ ସରଳରେଖାରେ ନାହାନ୍ତି $\overleftrightarrow{PQ}$ ଏବଂ $\overleftrightarrow{MN}$ ରେଖାଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରିବେ ଏବଂ ସେହି ଛେଦବିନ୍ଦୁ O ହେଉ। $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ଓ $\overline{OC}$ ଅଙ୍କନ କର।



[ଚିତ୍ର 7.7]

ପ୍ରମାଣ : ଯେହେତୁ O ବିନ୍ଦୁ $\overline{AB}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ, OA = OB। ସେହିପରି OB = OC। ସୁତରାଂ OA = OB = OC। ବର୍ତ୍ତମାନ O ବିନ୍ଦୁକୁ କେନ୍ଦ୍ରକରି OA ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଏକ ବୃତ୍ତ S ଅଙ୍କନ କଲେ B ଓ C ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ହେବେ। ଅର୍ଥାତ୍ A, B ଓ C ବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ S ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ହେବେ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ପ୍ରମାଣ କରିବା ଯେ ଏହିପରି ମାତ୍ର ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରିବ। ମନେକର ଏହିପରି ଆଉ ଏକ ବୃତ୍ତ S′ ରହିଅଛି। ଯାହାର କେନ୍ଦ୍ରବିନ୍ଦୁ O′। ଯେହେତୁ A, B ଓ C, S′ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ, O′A = O′B = O′C। O′A = O′B ⇒ O′, $\overline{AB}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ $\overleftrightarrow{PQ}$ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ। ସେହିପରି O′B = O′C ⇒ O′, $\overline{BC}$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ $\overleftrightarrow{MN}$ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ। ଅର୍ଥାତ୍ O ଏବଂ O′ $\overleftrightarrow{PQ}$ ଓ $\overleftrightarrow{RS}$ ରେଖାଦ୍ୱୟର ଦୁଇଟି ଛେଦବିନ୍ଦୁ ଯାହାକି ଅସମ୍ଭବ କାରଣ ଦୁଇଟି ସରଳରେଖା ମାତ୍ର ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରନ୍ତି। ସୁତରାଂ O ଏବଂ O′ ଅଭିନ୍ନ ଅଟନ୍ତି ଏବଂ OA = O′A। ତେଣୁ S ଓ S′ ଅଭିନ୍ନ ଅଟନ୍ତି। (ପ୍ରମାଣିତ)

ସଂଜ୍ଞା : ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ମଧ୍ୟଦେଇ ଅଙ୍କିତ ବୃତ୍ତକୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିବୃତ୍ତ **(Circum-circle)** ଓ ଏହାର କେନ୍ଦ୍ରବିନ୍ଦୁକୁ ପରିକେନ୍ଦ୍ର **(Circum-centre)** କୁହାଯାଏ।

ଚାରି ବା ତତୋଧିକ ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟଦେଇ ସର୍ବଦା ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ ସମ୍ଭବ ହୋଇ ନପାରେ। ମାତ୍ର କୌଣସି ଚତୁର୍ଭୁଜ ବା ବହୁଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁମାନେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ରହିଲେ ସେହି ଚତୁର୍ଭୁଜ ବା ବହୁଭୁଜଟିକୁ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ (inscribed in a circle) ଚତୁର୍ଭୁଜ ବା ବହୁଭୁଜ କୁହାଯାଏ। ଉପପାଦ୍ୟ-3 ଅନୁଯାୟୀ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜ ସର୍ବଦା ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହୋଇପାରିବ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ପରସ୍ପରକୁ ଦୁଇଟିରୁ ଅଧିକ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବେ ନାହିଁ।
ଯଦି ତୃତୀୟ ଏକ ଛେଦବିନ୍ଦୁ ରହିଥାଏ ତେବେ ଛେଦବିନ୍ଦୁତ୍ରୟ ଦୁଇଟିଯାକ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ରହିବେ। ଉପପାଦ୍ୟ-3 ଅନୁଯାୟୀ ଏହା ଅସମ୍ଭବ କାରଣ ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ କେବଳ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ହୋଇପାରନ୍ତି।

ପ୍ରଶ୍ନ : ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଥିବା ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟଦେଇ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ ଅସମ୍ଭବ।

ସଂଜ୍ଞା :
1. ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ସମାନ ହେଲେ ସେମାନଙ୍କୁ ସର୍ବସମ (Congruent) ବୃତ୍ତ କୁହାଯାଏ।
2. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଅଥବା ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତରେ ଯେଉଁ ଜ୍ୟାମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ସେମାନଙ୍କୁ ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା କୁହାଯାଏ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 4

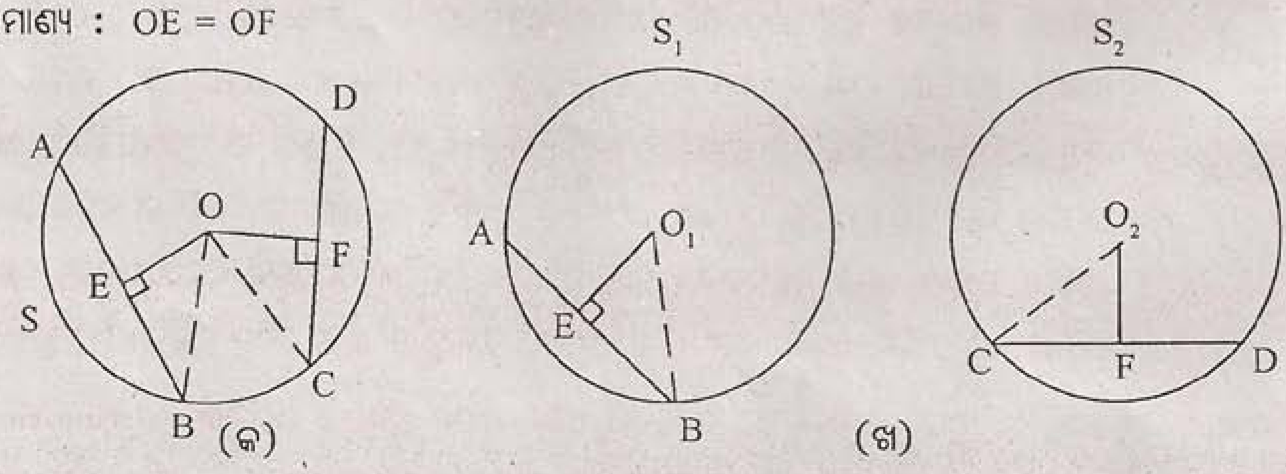
ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର (ଅଥବା ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତର) ସମାନ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ଜ୍ୟାମାନେ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ (ନିଜ ନିଜ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ) ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ।

[Chords of equal length in a circle (or congruent circles) are equidistant from the centre (or respective centres)]

[ଏଠାରେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତପାଇଁ ପ୍ରମାଣ ଦିଆଯାଇଛି। ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ପାଇଁ ପ୍ରମାଣ ଅନୁରୂପ ହେବ ଚିତ୍ର 7.8(ଖ)]

ଦତ୍ତ : S ବୃତ୍ତରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ଏବଂ AB = CD। O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର (ଚିତ୍ର 7.8(କ))। $\overline{OE}$ ଏବଂ $\overline{OF}$ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ପ୍ରତିଲମ୍ବ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : OE = OF



[ଚିତ୍ର 7.8]

ଅଙ୍କନ : $\overline{OB}$ ଏବଂ $\overline{OC}$ ଅଙ୍କନ କର।

ପ୍ରମାଣ : $\because$ $\overline{OE} \perp \overline{AB}$, $\overline{OE}$ $\overline{AB}$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରିବ। (ଉପପାଦ୍ୟ - 1)

ସୁତରାଂ $AE = EB \Rightarrow EB = \frac{1}{2}AB$।

$\because$ $\overline{OF} \perp \overline{CD}$ ଆମେ ପୂର୍ବପରି ପାଇବା ଯେ $CF = \frac{1}{2}AB$।

କିନ୍ତୁ $AB = CD$ (ଦତ୍ତ)

$\therefore EB = CF$।

ବର୍ତ୍ତମାନ ΔOEB ଏବଂ ΔOFC ମଧ୍ୟରେ, $EB = CF$

$OB = OC$ (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)

$m\angle OEB = m\angle OFC =$ ଏକ ସମକୋଣ।

$\therefore \Delta OEB \cong \Delta OFC$ (ସମକୋଣ-ବାହୁ-କର୍ଣ୍ଣ) $\Rightarrow OE = OF$। (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉପପାଦ୍ୟ - 5

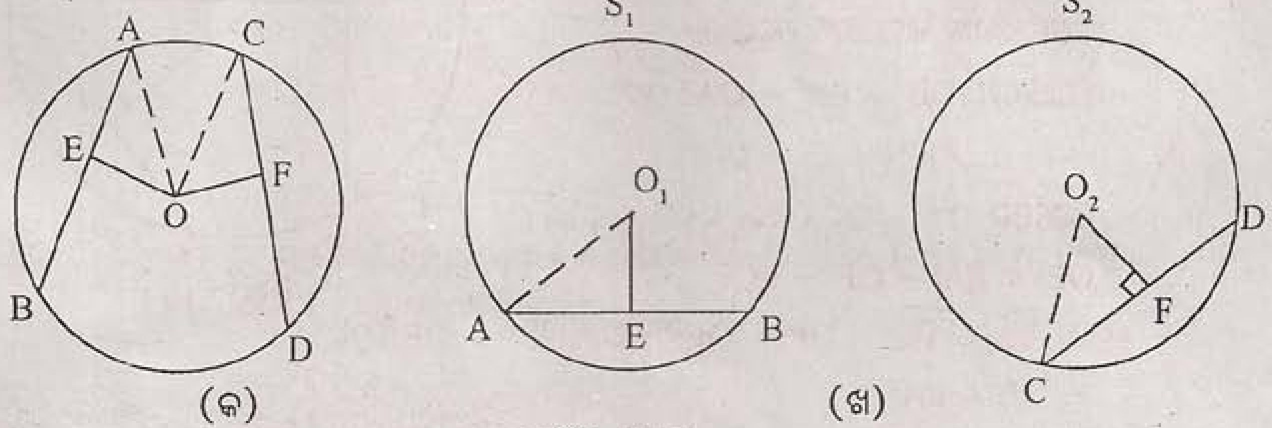
(ଉପପାଦ୍ୟ-4ର ବିପରୀତ)

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ (ଅଥବା ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତରେ) କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ (ଅଥବା ନିଜ ନିଜ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ) ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ଜ୍ୟାମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ।

[Chords of a circle (or of congruent circles) equidistant from the centre (or from the corresponding centres) are of equal length.]

[ଏଠାରେ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ପ୍ରମାଣ ଦିଆଯାଇଛି। ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତପାଇଁ ପ୍ରମାଣ ଅନୁରୂପ ହେବ (ଚିତ୍ର 7.9 (ଖ) ଦେଖ)]

ଦତ୍ତ : ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2ର କେନ୍ଦ୍ର ଯଥାକ୍ରମେ O_1 ଏବଂ O_2 (ଚିତ୍ର 7.9(ଖ))। $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଯଥାକ୍ରମେ S_1 ଓ S_2ର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା। $\overline{O_1E}$ ଏବଂ $\overline{O_2F}$ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ପ୍ରତି ନିଜ ନିଜ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ଲମ୍ବ। $O_1E = O_2F$।



[ଚିତ୍ର 7.9]

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $AB = CD$

ଅଙ୍କନ : $\overline{O_1A}$ ଏବଂ $\overline{O_2C}$ ଅଙ୍କନ କର।

ପ୍ରମାଣ : ΔO_1AE ଏବଂ ΔO_2CF ମଧ୍ୟରେ $O_1A = O_2C$ (ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)

$O_1E = O_2F$ (ଦତ୍ତ)

$m\angle O_1EA = m\angle O_2FC$ = ଏକ ସମକୋଣ।

$\therefore \Delta O_1AE \cong \Delta O_2CF$ (ସମକୋଣ-କର୍ଣ୍ଣ-ବାହୁ)

$\Rightarrow AE = CF$

ଉପପାଦ୍ୟ - 1 ଅନୁସାରେ E ଓ F ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ।

$\therefore AB = 2AE = 2CF = CD$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 : ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର (ଅଥବା ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତର) ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ମଧ୍ୟରେ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ (ନିଜ ନିଜ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ) ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ଜ୍ୟାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିକଟତର ଜ୍ୟାର ଦୈର୍ଘ୍ୟଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର।

[Of any two chords of a circle (or congruent circles) the length of one farther from the centre (or corresponding centres) is smaller than the length of the other.]

(ଏଠାରେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ପ୍ରମାଣ ଦିଆଯାଇଛି। ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ପ୍ରମାଣ ଅନୁରୂପ ହେବ।)

ଦତ୍ତ : O ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା। $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ ଏବଂ $\overline{OF} \perp \overline{CD}$। $OF > OE$।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $CD < AB$।

ଅଙ୍କନ : $\overline{OA}$ ଏବଂ $\overline{OC}$ ଅଙ୍କନ କର।

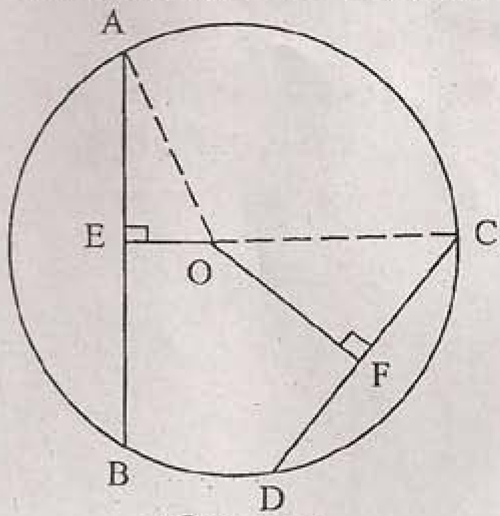
ପ୍ରମାଣ : ΔOEA ଏବଂ ΔOFC ଦ୍ୱୟ ସମକୋଣୀ, ପିଥାଗୋରାସ୍ ଉପପାଦ୍ୟ ଅନୁଯାୟୀ

ଯଥାକ୍ରମେ $OE^2 + EA^2 = OA^2$ ଏବଂ

$OF^2 + FC^2 = OC^2$।

ଯେହେତୁ $OA = OC$ (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)

$OE^2 + EA^2 = OF^2 + FC^2$



[ଚିତ୍ର 7.10]

$\Rightarrow EA^2 - FC^2 = OF^2 - OE^2 > 0$ ($\because OF > OE$ (ଦତ୍ତ))

$\Rightarrow FC < EA$

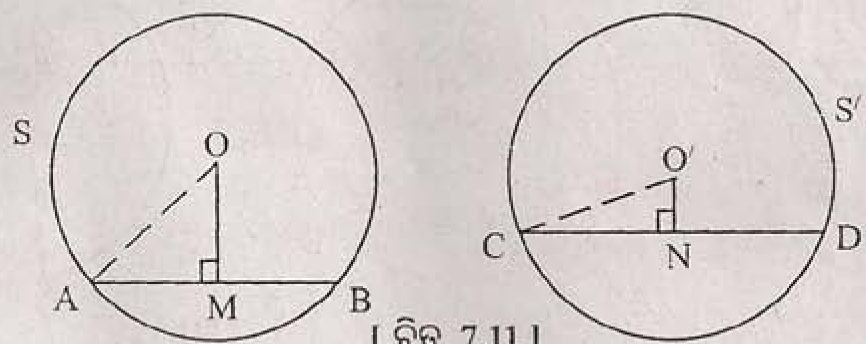
$\Rightarrow CD = 2FC < 2EA = AB$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 : ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର (ଅଥବା ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତର) ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ମଧ୍ୟରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ଜ୍ୟାଟି କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ (ଅଥବା ନିଜ ନିଜ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ) ଅଧିକ ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ।

[Of any two chords of a circle (or of congruent circles) the smaller one is farther from the centre (or respective centres)]

(ଏଠାରେ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ପ୍ରମାଣ ଦିଆଯାଉଛି। ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ପ୍ରମାଣ ଅନୁରୂପ ହେବ।)

ଦତ୍ତ : ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ S ଓ S′ ର କେନ୍ଦ୍ର ଯଥାକ୍ରମେ O ଏବଂ O′। $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଯଥାକ୍ରମେ S ଓ S′ର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା। $AB < CD$। $\overline{OM}$ ଓ $\overline{O'N}$ ଯଥାକ୍ରମେ O ଏବଂ O′ ଠାରୁ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ପ୍ରତି ଲମ୍ବ (ଚିତ୍ର 7.11)।



[ଚିତ୍ର 7.11]

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $OM > O'N$।

ଅଙ୍କନ : $\overline{OA}$ ଏବଂ $\overline{O'C}$ ଅଙ୍କନ କର।

ପ୍ରମାଣ : ΔOAM ଏବଂ $\Delta O'CN$ ଦୁଇ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ, ପିଥାଗୋରାସ୍ ଉପପାଦ୍ୟ ଅନୁଯାୟୀ,

$$\left.\begin{aligned} AM^2 + OM^2 &= OA^2 \\ \text{ଏବଂ } CN^2 + O'N^2 &= O'C^2 \end{aligned}\right\} \quad \text{..................(i)}$$

$OA = O'C$ (ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)

$\Rightarrow AM^2 + OM^2 = CN^2 + O'N^2$ (i) ରୁ ....(ii)

କିନ୍ତୁ $AB < CD \Rightarrow AM = \frac{1}{2}AB < \frac{1}{2}CD = CN \Rightarrow AM^2 < CN^2$

$\therefore$ (ii) ରୁ $OM^2 > O'N^2 \Rightarrow OM > O'N$ (ପ୍ରମାଣିତ)

7.3. ଜ୍ୟା ଓ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ **(Chord and Angle subtended by the Chord at the Centre) :**

ସଂଜ୍ଞା : ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର $\overline{AB}$ ବ୍ୟାସ ଭିନ୍ନ ଏକ ଜ୍ୟା ଏବଂ O କେନ୍ଦ୍ରବିନ୍ଦୁ ହେଲେ $\angle AOB$କୁ ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ଦ୍ୱାରା କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ (Angle subtended by the chord $\overline{AB}$ at the centre) ଅଥବା $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ କୁହାଯାଏ।

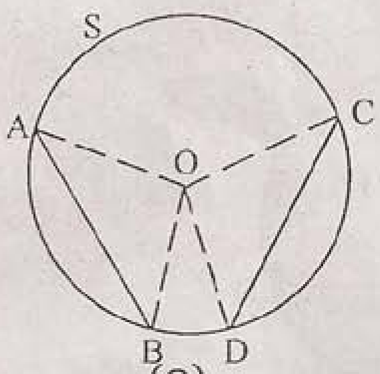
ଉପପାଦ୍ୟ - 6

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର (ଅଥବା ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତର) ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ (ଅଥବା ନିଜ ନିଜ କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ) ଯେଉଁ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରନ୍ତି ସେମାନେ ସର୍ବସମ।

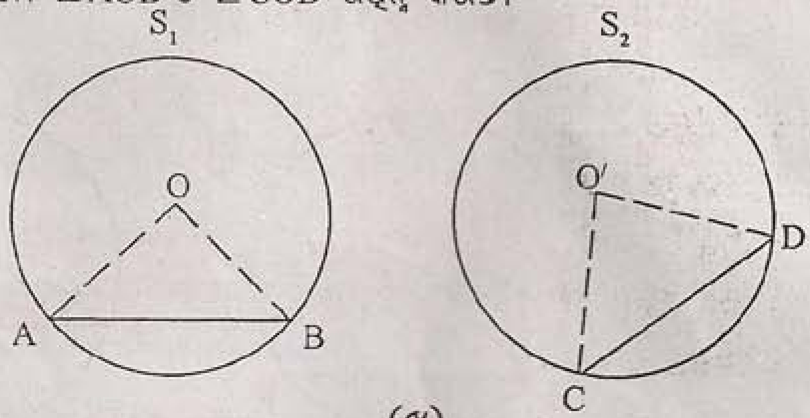
[In a circle (or in two congruent circles) the angles subtended by two congruent chords at the centre (or at respective centres) are congruent.]

(ଏଠାରେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ପ୍ରମାଣ ଦିଆଯାଇଛି। ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ଅନୁରୂପ ପ୍ରମାଣ ହେବ।)

ଦତ୍ତ : S ବୃତ୍ତରେ O କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା (ଚିତ୍ର 7.12(କ))। $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଯଥାକ୍ରମେ $\angle AOB$ ଓ $\angle COD$ ଉତ୍ପନ୍ନ କରନ୍ତି।



(କ)



(ଖ)

[ଚିତ୍ର 7.12]

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $m\angle AOB = m\angle COD$

ପ୍ରମାଣ : ΔOAB ଏବଂ ΔOCD ମଧ୍ୟରେ

$$\left.\begin{array}{l} OA = OC \\ OB = OD \end{array}\right\} \text{(ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)}$$

$AB = CD$ (ଦତ୍ତ)

$\therefore \Delta OAB \cong \Delta OCD$ (ବାହୁ-ବାହୁ-ବାହୁ)

$\Rightarrow m\angle AOB = m\angle COD$। (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉପପାଦ୍ୟ - 7

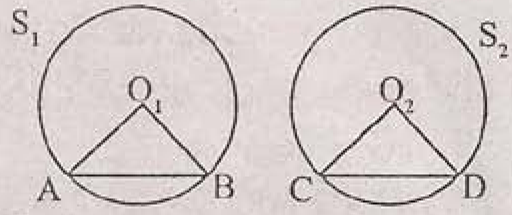
(ଉପପାଦ୍ୟ-6ର ବିପରୀତ)

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର (ଅଥବା ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତର) ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ (ଅଥବା ନିଜ ନିଜ କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ) ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ହେଲେ ଜ୍ୟା ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ।

[In a circle (or in two congruent circles) the chords subtending congruent angles at the centre (or at respective centres) are congruent.]

(ଏଠାରେ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ପ୍ରମାଣ ଦିଆଯାଇଛି। ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ପାଇଁ ପ୍ରମାଣ ଅନୁରୂପ ହେବ।)

ଦତ୍ତ : S_1 ଓ S_2 ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତର ଯଥାକ୍ରମେ O_1 ଏବଂ O_2 ଦୁଇ କେନ୍ଦ୍ରବିନ୍ଦୁ। $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଯଥାକ୍ରମେ $\angle AO_1B$ ଏବଂ $\angle CO_2D$ ଉତ୍ପନ୍ନ କରନ୍ତି ଯେପରିକି $m\angle AO_1B = m\angle CO_2D$।



ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : AB = CD

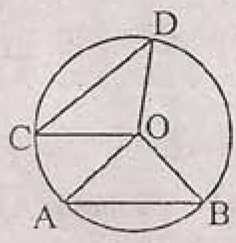
ପ୍ରମାଣ : ΔO_1AB ଏବଂ ΔO_2CD ମଧ୍ୟରେ

$\left.\begin{array}{l} O_1A = O_2C \\ O_1B = O_2D \end{array}\right\}$ (ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)

$m\angle AO_1B = m\angle CO_2D$ (ଦତ୍ତ)

$\Rightarrow \Delta O_1AB \cong \Delta O_2CD$ (ବାହୁ-କୋଣ-ବାହୁ)

$\therefore$ AB = CD (ପ୍ରମାଣିତ)



[ଚିତ୍ର 7.13]

ଅନୁଶୀଳନୀ – 7(a)

'କ' – ବିଭାଗ

1. ଉକ୍ତିଟି ଠିକ୍ ଥିଲେ T ଏବଂ ଭୁଲ୍ ଥିଲେ F ଲେଖ।

(i) ବୃତ୍ତର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ କୌଣସି ଏକ ବ୍ୟାସର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଅଟେ।

(ii) ବୃତ୍ତର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ କୌଣସି ଏକ ଜ୍ୟାର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଅଟେ।

(iii) ବୃତ୍ତର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ କୌଣସି ଏକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ।

(iv) ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଜ୍ୟାର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଅଟେ।

(v) ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ବୃତ୍ତର ଏକମାତ୍ର ବିନ୍ଦୁ ଯାହାଠାରୁ ବୃତ୍ତର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବିନ୍ଦୁ ସମାନ ଦୂରରେ ଅବସ୍ଥିତ।

(vi) ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ଜ୍ୟା କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ସମାନ ଦୂରରେ ରହିପାରିବେ ନାହିଁ।

(vii) ଦୁଇଟି ବ୍ୟାସ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି।

(viii) ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିକେନ୍ଦ୍ର ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ।

(ix) ଗୋଟିଏ ବହୁଭୁଜ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହେଲେ ଏହାର କେବଳ ଗୋଟିଏ ପରିବୃତ୍ତ ରହିବ।

(x) ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବ୍ୟାସଠାରୁ କମ୍।

(xi) ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଗୋଟିଏ ପରିବୃତ୍ତ ରହିଅଛି।

(xii) ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ଏକ ବୃତ୍ତକୁ ସର୍ବଦା ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ।

(xiii) ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକର କେନ୍ଦ୍ର ଅନ୍ୟ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ହେଲେ ଅନ୍ୟଟିର କେନ୍ଦ୍ର ପ୍ରଥମୋକ୍ତ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ହେବ।

2. ପ୍ରଦତ୍ତ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ଉତ୍ତରରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର।

(i) ଦୁଇଟି ଅସମାନ୍ତର ଜ୍ୟାର ଛେଦବିନ୍ଦୁ ——— ।

(a) ବୃତ୍ତର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ। (b) ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ।

(c) ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ। (d) ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ କିମ୍ବା ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ଅଟେ।

(ii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଏକ ଜ୍ୟା କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଏକ ସମକୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ। ଏହାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 5 ସେ.ମି. ହେଲେ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ——— ସେ.ମି.।

(a) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ (b) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ (c) $5\sqrt{2}$ (d) $2\sqrt{5}$

(iii) ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡ $\overline{AB}$ ସର୍ବାଧିକ ——— ଟି ବୃତ୍ତର ସାଧାରଣ ଜ୍ୟା ହୋଇପାରିବ।

(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) ଅସଂଖ୍ୟ

(iv) ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡ $\overline{AB}$ ସର୍ବାଧିକ ——— ଟି ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସ ହୋଇପାରିବ।

(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) ଅସଂଖ୍ୟ

(v) ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡ $\overline{AB}$ ସର୍ବାଧିକ ——— ଟି ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ହୋଇପାରିବ।

(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) ଅସଂଖ୍ୟ

'ଖ' - ବିଭାଗ

3. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 10 ସେ.ମି.। ଏହାର ଏକ ଜ୍ୟା କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ 6 ସେ.ମି. ଦୂରରେ ଅବସ୍ଥିତ। ଜ୍ୟାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

4. ଏକ ବୃତ୍ତରେ O କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ $\overline{AB}$ ଏକ ଜ୍ୟା। D, $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ। AB = 24 ସେ.ମି. ଓ OD = 9 ସେ.ମି. ହେଲେ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

5. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ D ବ୍ୟାସ ଭିନ୍ନ ଏକ ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overline{OD}$, $\angle AOB$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ।

6. $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ଏବଂ O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର।

(i) ଜ୍ୟା ଦ୍ୱୟ O ଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overline{OA}$, $\angle BAC$କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ।

(ii) AB = AC ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overline{OA}$, $\angle BAC$କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ।

7. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ଜ୍ୟା। P ଏବଂ Q ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ O ବିନ୍ଦୁ $\overleftrightarrow{PQ}$ ଉପରିସ୍ଥ ହେବ।

8. (i) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଯେ କୌଣସି ଦୁଇଟି ଜ୍ୟାର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି।

(ii) ଏକ ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ନିରୂପଣ କରିବାର ସୋପାନଗୁଡ଼ିକ ଲେଖ।

9. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ସେ.ମି. ଏବଂ ଏକ ଜ୍ୟା $\sqrt{2}r$ ସେ.ମି.। ଜ୍ୟାଟିର ସମ୍ମୁଖ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

10. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ବାହୁମାନଙ୍କଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ତ୍ରିଭୁଜଟି ସମବାହୁ।

11. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ବ୍ୟାସ ବୃତ୍ତର ବୃହତ୍ତମ ଜ୍ୟା।

'ଗ' – ବିଭାଗ

12. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା 3 ସେ.ମି.। CD = 6 ସେ.ମି. ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 5 ସେ.ମି. ହେଲେ $\overline{AB}$ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

13. $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ଜ୍ୟା। AB = CD = 8 ସେ.ମି.। ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 5 ସେ.ମି. ହେଲେ ଜ୍ୟାଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

14. $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ଯଥାକ୍ରମେ 6 ସେ.ମି. ଓ 3 ସେ.ମି. ଦୂରତାରେ ଅବସ୍ଥିତ। AB = 12 ସେ.ମି. ହେଲେ AC ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

15. ΔABCରେ AB = AC। O, ΔABCର ପରିବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର। ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\angle BAC$ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ରଶ୍ମି O ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଅଟେ।

16. $\overline{PQ}$ ଓ $\overline{RS}$ ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ଜ୍ୟା। ଅନ୍ୟ ଏକ ଜ୍ୟା $\overline{XY}$, $\overline{PQ}$ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overline{XY}$, $\overline{RS}$ର ମଧ୍ୟ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ଲମ୍ବ ହେବ। ଏହା ମଧ୍ୟ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overline{XY}$ ଏକ ବ୍ୟାସ।

17. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ଏକ ବ୍ୟାସ ଦ୍ୱାରା ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଜ୍ୟା ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର।

18. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କଲେ ସେମାନଙ୍କ ଛେଦବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେବ।

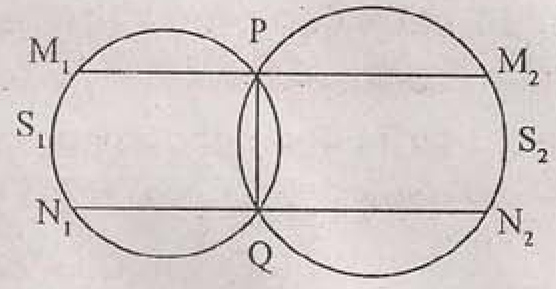
[ସୂଚନା : ଅସମ୍ଭବାୟନ ପ୍ରଣାଳୀ (Method of contradiction) ବ୍ୟବହାର କର]

19. $\overline{AB}$ ଓ $\overline{BC}$ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା। $m\angle ABC = 90^0$। O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, A, O ଏବଂ C ଏକରେଖୀୟ [ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{AC}$ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସ]।

20. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ତ୍ରିଭୁଜଟିର କର୍ଣ୍ଣର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଅଟେ।

21. $\overline{PQ}$ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଜ୍ୟା। P ଓ Q ଠାରେ ଉକ୍ତ ଜ୍ୟା ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ ବୃତ୍ତକୁ ଯଥାକ୍ରମେ R ଓ S ଠାରେ ଛେଦ କଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ PR = QS ଏବଂ PQ = RS।

22. ଚିତ୍ର 7.14 ରେ S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ P ଓ Q ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି। P ବିନ୍ଦୁରେ $\overline{PQ}$ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ S_1କୁ M_1ରେ ଓ S_2କୁ M_2ରେ ଛେଦ କରୁ ଏବଂ ସେହିପରି Q ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ S_1 ଓ S_2କୁ ଯଥାକ୍ରମେ N_1 ଓ N_2ରେ ଛେଦ କରୁ। ପ୍ରମାଣ କରେ ଯେ $M_1M_2 = N_1N_2$।



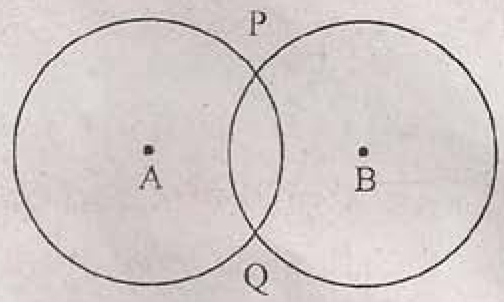
[ଚିତ୍ର 7.14]

23. ଚିତ୍ର 7.15ରେ A ଓ B ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ଛେଦୀ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ P ଓ Q ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ ଅଟନ୍ତି।

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ –

(i) $\overleftrightarrow{AB}$, $\overline{PQ}$ ସାଧାରଣ ଜ୍ୟାକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ।

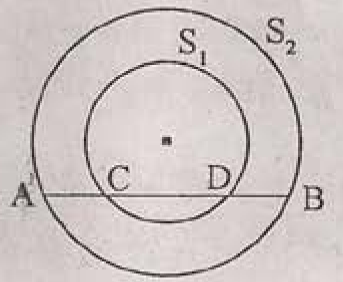
(ii) $\overleftrightarrow{AB} \perp \overline{PQ}$



[ଚିତ୍ର 7.15]

24. ଚିତ୍ର 7.15ରେ (ପ୍ରଶ୍ନ 23) P ମଧ୍ୟଦେଇ ଅଙ୍କିତ ଏବଂ $\overline{AB}$ ସହିତ ସମାନ୍ତର ରେଖା ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟକୁ M ଓ N ଠାରେ ଛେଦକଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ MN = 2 AB।

25. ଚିତ୍ର 7.16ରେ S_1 ଓ S_2 ଦୁଇଟି ଏକ-କେନ୍ଦ୍ରିକ ବୃତ୍ତ। ଏକ ସରଳରେଖା ଉଭୟ ବୃତ୍ତକୁ ଯଥାକ୍ରମେ A, C, D ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ।



[ଚିତ୍ର 7.16]

(i) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ AC = DB।

(ii) S_1 ଓ S_2ର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଯଥାକ୍ରମେ 14 ସେ.ମି. ଓ 16 ସେ.ମି. ଏବଂ ସରଳରେଖାର କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ଦୂରତା 4 ସେ.ମି. ହେଲେ AC ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

26. ପ୍ରମାଣ କର :

(i) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ଏକ ଆୟତ ଚିତ୍ର ଅଟେ।

(ii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ରମ୍ବସ ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର ଅଟେ।

(iii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜର ବାହୁମାନେ କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ ସମଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ହେଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର।

27. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ମଧ୍ୟଦେଇ ଅଙ୍କିତ ଦୁଇଟି ଛେଦକ ବୃତ୍ତକୁ A, B ଏବଂ C, D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ଯେପରି P-A-B ଏବଂ P-C-D। ଯଦି AB = CD ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ (i) PA = PC ଏବଂ (ii) $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ ।

28. ABC ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O। ଏହାର ଦୁଇଟି ସମଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ପରସ୍ପରକୁ ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି। [illegible] C, $\overline{OP}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

(i) PA = PC ଏବଂ (ii) $\overline{AC} \| \overline{BD}$ [ସୂଚନା : $\overline{OE} \perp \overline{AB}$ ଏବଂ $\overline{OF} \perp \overline{CD}$ ଅଙ୍କନ କର। O, P ଯୋଗକର]

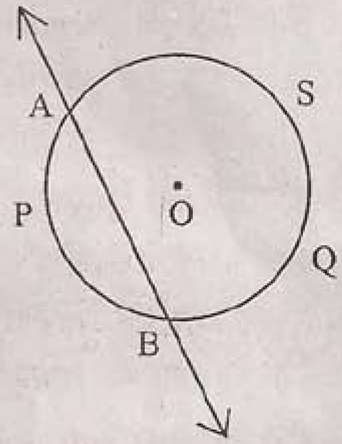
29. P ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ Q ବୃତ୍ତର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overrightarrow{PQ}$ ବୃତ୍ତକୁ ଅନ୍ୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ।

[ସୂଚନା : ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r ହେଉ। $\overline{OD} \perp \overrightarrow{PQ}$ ହେଉ। ମନେକର OD = d। R, $\overrightarrow{PQ}$ ଉପରିସ୍ଥ ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଉ ଯେପରି P–D–R ଏବଂ $DR = \sqrt{r^2 - d^2} \Rightarrow OR = r$]

30. Q ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ Q ମଧ୍ୟଦେଇ ଯାଇଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ସରଳରେଖା ବୃତ୍ତକୁ ଦୁଇଟି ଏବଂ କେବଳ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ।

[ସୂଚନା : L ରେଖା Q ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ହେଉ ଏବଂ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଠାରୁ Lର ଦୂରତା = OD = d ହେଉ। L ଉପରେ R ଓ S ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ନିଅ ଯେପରି R-D-S ଏବଂ RD = DS = $\sqrt{r^2 - d^2}$ । R ଏବଂ S ଆବଶ୍ୟକ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ। ପୁନଶ୍ଚ ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ L ବୃତ୍ତକୁ ଦୁଇଟିରୁ ଅଧିକ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ ନାହିଁ।]

7.4. ଚାପ, କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ (Arc and Central Angle) :



[ଚିତ୍ର 7.17]

ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 7.17ରେ S ବୃତ୍ତ ଉପରେ A ଓ B ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ। A ଓ B ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ସମେତ 'A ଠାରୁ B ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ' ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍‌କୁ ଏକ ଚାପ (arc) କୁହାଯିବ। A ଓ B ଏହି ଚାପର ଦୁଇଟି ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ (end point) ଅଟନ୍ତି। ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଭିନ୍ନ ଚାପର ଅନ୍ୟ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ଚାପର **ଅନ୍ତଃସ୍ଥ** ବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ। ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଯେ 'A ଠାରୁ B ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ' ବାକ୍ୟାଂଶଟି ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଅଂଶକୁ ବୁଝାଉଛି। $\overleftrightarrow{AB}$ ସରଳରେଖା S ବୃତ୍ତର ଏକ ଛେଦକ (Secant)। $\overleftrightarrow{AB}$ ସମତଳକୁ ଦୁଇଟି ଅଂଶରେ ବିଭକ୍ତ କରୁଅଛି ଏବଂ ତଦନୁଯାୟୀ ବୃତ୍ତ Sର ଦୁଇଟି ଅଂଶ ନିର୍ଣ୍ଣିତ ହେଉଅଛି ଯାହା ଛେଦକର ଦୁଇ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ରହିଅଛି। ଛେଦକର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ P ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଭିନ୍ନ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଉ। ବୃତ୍ତର ଯେଉଁ ଅଂଶ ଉପରେ P ବିନ୍ଦୁ ଅଛି ସେହି ଅଂଶଟିକୁ APB ବା BPA ଚାପ (arc) କୁହାଯାଏ। ଏହା $\overset{\frown}{APB}$ ବା $\overset{\frown}{BPA}$ ଚିହ୍ନ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ। ସୁତରାଂ ବୃତ୍ତର ଚାପକୁ ନିମ୍ନମତେ ସଂଜ୍ଞାକୃତ କରାଗଲା :

ସଂଜ୍ଞା : $\overline{AB}$ ବୃତ୍ତର ଏକ ଜ୍ୟା ହେଲେ A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ସମେତ $\overline{AB}$ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍‌କୁ ଏକ ଚାପ କୁହାଯାଏ। ସେହିପରି Q, ଛେଦକ $\overleftrightarrow{AB}$ର ଅନ୍ୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ଚାପଟିକୁ $\overset{\frown}{AQB}$ ଅଥବା $\overset{\frown}{BQA}$ ଚାପ କୁହାଯାଏ। A ଓ B ଉଭୟ ଚାପର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ଅଟନ୍ତି। $\overset{\frown}{APB}$ ଓ $\overset{\frown}{AQB}$ ଚାପଦ୍ୱୟକୁ ପରସ୍ପରର ବିପରୀତ ଚାପ (oppc.ite arc) କୁହାଯାଏ। ଉକ୍ତ ଚାପଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଗ

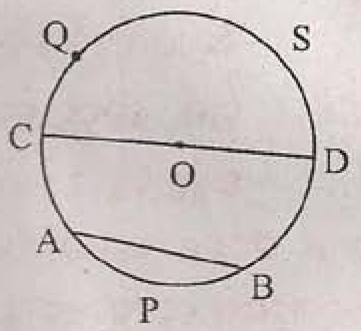
(union)ରେ ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ବୃତ୍ତଟି ଗଠିତ ହେଉଥିବାରୁ ଗୋଟିକୁ ଅପରର ପରିପୂରକ ଚାପ **(Supplementary arc)** ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ। ଏହି ଚାପଦ୍ୱୟକୁ $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ (ଅଥବା ଜ୍ୟା ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ) ଚାପ କୁହାଯାଏ ଏବଂ $\overline{AB}$ ଜ୍ୟାକୁ ଉଭୟ ଚାପର ସମ୍ପୃକ୍ତ ଜ୍ୟା (Corresponding chord) କୁହାଯାଏ।

କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ, ବୃହତ୍‌ଚାପ, ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ :

କୌଣସି ଚାପ $\overset{\frown}{APB}$ରେ ଯଦି P ବିନ୍ଦୁ ଏବଂ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରବିନ୍ଦୁ O, $\overline{AB}$ ଜ୍ୟାର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ $\overset{\frown}{APB}$ ଚାପକୁ ଏକ **କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ** (minor arc) କୁହାଯାଏ (ଚିତ୍ର 7.17 ଦେଖ)। କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପର ବିପରୀତ ଚାପକୁ ବୃହତ୍‌ଚାପ **(Major arc)** କୁହାଯାଏ। $\overset{\frown}{APB}$ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ହେଲେ ଏହାକୁ 'AB କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ' ମଧ୍ୟ ଲେଖାଯାଏ। ସେହିପରି 'AB ବୃହତ୍ ଚାପ' $\overset{\frown}{AQB}$ ବୃହତ୍ ଚାପକୁ ବୁଝାଏ।

ଯେପରି ପ୍ରତ୍ୟେକ ରେଖାଖଣ୍ଡର ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ରହିଅଛି ସେହିପରି କୌଣସି ବୃତ୍ତରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ରହିଅଛି। ଏହାର ମାପ ପ୍ରଣାଳୀ ଅନ୍ୟତ୍ର ଆଲୋଚନା କରାଯିବ। ତେବେ କୌଣସି ବୃତ୍ତରେ ଏକ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ ଚାପଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବୃହତ୍‌ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର- ସେଥିପାଇଁ ଏପରି ନାମକରଣ।

ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ (Semicircle) : ଏକ ବୃତ୍ତରେ କୌଣସି ବ୍ୟାସ ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ ଚାପକୁ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ (Semicircle) କୁହାଯାଏ।

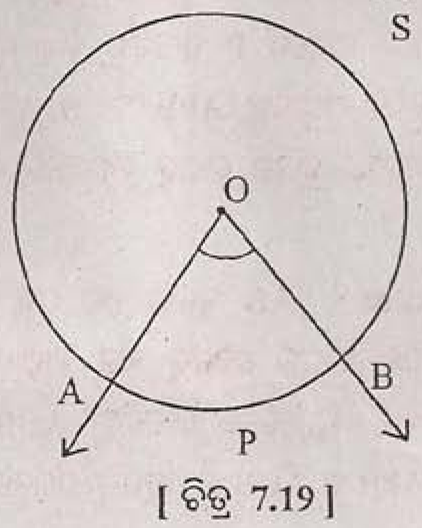


[ଚିତ୍ର 7.18]

ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତର ବିପରୀତ ଚାପ ମଧ୍ୟ ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ। ଚିତ୍ର 7.18ରେ ବୃତ୍ତର $\overset{\frown}{APB}$ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ, $\overset{\frown}{AQB}$ ଏକ ବୃହତ୍ ଚାପ ଏବଂ $\overset{\frown}{CQD}$, $\overset{\frown}{CPD}$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ। ସଂଜ୍ଞାନୁସାରେ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ବା ବୃହତ୍ ଚାପ ନୁହେଁ। ବ୍ୟାସ ଦ୍ୱାରା ବୃତ୍ତଟି ଦୁଇ ସମାନ ଅଂଶରେ ଛେଦିତ ହେଉଥିବାରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅଂଶକୁ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ କୁହାଯାଏ।

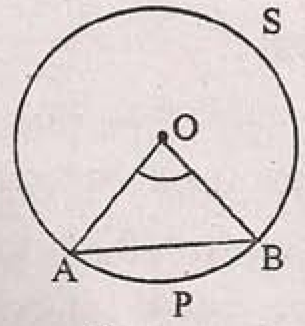
କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ (Central Angle) :

କୌଣସି କୋଣର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଏକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେଲେ ଉକ୍ତ କୋଣକୁ ବୃତ୍ତର ଏକ **କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ (Central angle)** କୁହାଯାଏ। ଚିତ୍ର 7.19ରେ $\angle AOB$, S ବୃତ୍ତର ଏକ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ। $\angle AOB$ର ବାହୁଦ୍ୱୟ ବୃତ୍ତକୁ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ A ଓ Bରେ ଛେଦକରନ୍ତି। P ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ $\angle AOB$ର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶରେ ଥିବା ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ $\overset{\frown}{APB}$ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ହେବ। ଅନ୍ୟ ପକ୍ଷରେ (ଚିତ୍ର 7.17) $\overset{\frown}{APB}$ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ଓ O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେଲେ $\angle AOB$ କୁ $\overset{\frown}{APB}$ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ **(angle subtended by $\overset{\frown}{APB}$ at the centre)** ବା $\overset{\frown}{APB}$ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ବା ସଂକ୍ଷେପରେ $\overset{\frown}{APB}$ ର କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ କୁହାଯାଏ। $\overset{\frown}{APB}$କୁ $\angle AOB$ ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ **(intercepted by $\angle AOB$)** ଚାପ କୁହାଯାଏ।



[ଚିତ୍ର 7.19]

ଆମେ ପୂର୍ବରୁ ଜାଣିଛେ $\overline{AB}$ ବ୍ୟାସ ଭିନ୍ନ ଯେ କୌଣସି ଜ୍ୟା ଏବଂ O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେଲେ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣ $\angle AOB$ ହେବ। ସୁତରାଂ $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା କେନ୍ଦ୍ରରେ ଉତ୍ପନ୍ନ ହେଉଥିବା କୋଣ ଏବଂ $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ଦୁହେଁ ଅଭିନ୍ନ (ଚିତ୍ର 7.20)।

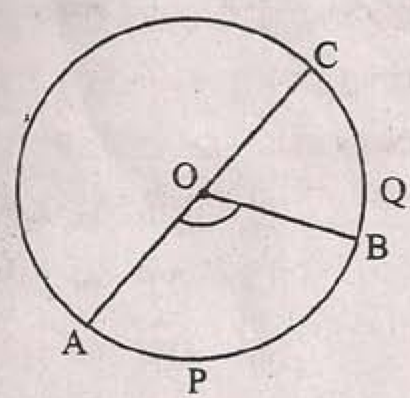


[ଚିତ୍ର 7.20]

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ଚାପର ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ଥିଲେ ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁଟି ଉଭୟ ଚାପର ଏକ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ହେବ ଏବଂ ଏହିପରି ଦୁଇଟି ଚାପକୁ ସନ୍ନିହିତ ଚାପ **(adjacent arcs)** କୁହାଯାଏ। ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ଚାପର ସଂଯୋଗ (union)ରେ ଏକ ନୂତନ ଚାପ ଗଠିତ ହୁଏ। ଚିତ୍ର 7.18ରେ $\overparen{QCA}$ ଓ $\overparen{APB}$ ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ଚାପର ସଂଯୋଗରେ $\overparen{QAB}$ ଚାପ ଗଠିତ ହେଉଅଛି। ଦୁଇଟି ବୃହତ୍ ଚାପ ସନ୍ନିହିତ ଚାପ ହୋଇପାରିବେ ନାହିଁ।

ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ (Degree measure of an arc)

ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଏକ କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରେ। କୋଣର ତିନି ପ୍ରକାର ପରିମାପ (ଯଥା- ଡିଗ୍ରୀ, ରେଡ଼ିଆନ୍ ଓ ଗ୍ରେଡ୍) ବ୍ୟବହୃତ ହୁଏ। ତଦନୁଯାୟୀ ଚାପର ତିନିପ୍ରକାର ପରିମାପର ସଂଜ୍ଞା ଦିଆଯାଇପାରିବ। ନିମ୍ନରେ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ସଂଜ୍ଞା ଦିଆଯାଇଛି।



[ଚିତ୍ର 7.21]

ସଂଜ୍ଞା :

ଗୋଟିଏ ଚାପ $\overparen{AB}$ (ଅଥବା $\overparen{APB}$)ର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ 0 ଓ 360 ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଯାହା $m\overparen{AB}$ (ଅଥବା $m\overparen{APB}$) ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ। ଏହା ନିମ୍ନମତେ ସ୍ଥିରୀକୃତ ହୁଏ :

O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେଲେ,

(i) $m\overparen{AB}$ (କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ) $= m\angle AOB$

(ii) $m\overparen{AB}$ (ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ) $= 180^0$

(iii) $m\overparen{AB}$ (ବୃହତ୍‌ଚାପ) $= 360^0 - m\overparen{AB}$ (କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ)

ଏଠାରେ 'm' ଅକ୍ଷରଟି 'measure' ବା 'ମାପ'କୁ ସୂଚିତ କରୁଅଛି।

ସଂଜ୍ଞାନୁଯାୟୀ ଏକଚାପ ଓ ଏହାର ବିପରୀତ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ସମଷ୍ଟି 360^0 । ଚିତ୍ର 7.21ରେ $m\angle AOB = 120^0$ ହେଲେ।

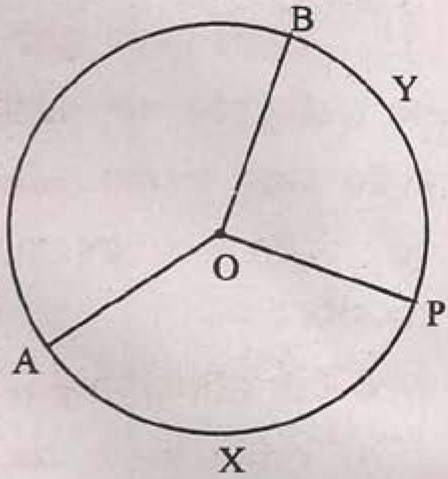
$m\overparen{APB} = m\angle AOB = 120^0$, $m\overparen{APC} = 180^0$

$m\overparen{ACB} = 360^0 - 120^0 = 240^0$ ଏବଂ $m\overparen{BQC} = 60^0$ ହେବ।

ସୂଚନା :

ସେହିପରି ଚାପର ରେଡ଼ିଆନ ପରିମାପ 0 ଓ 2π ମଧ୍ୟରେ ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଗ୍ରେଡ୍ ପରିମାପ 0 ଓ 400 ମଧ୍ୟରେ ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା। ଉଚ୍ଚତର ଗଣିତରେ ରେଡ଼ିଆନ୍ ପରିମାପର ବହୁଳ ବ୍ୟବହାର ହୁଏ। ଏହାର ଆଲୋଚନା ପରିମିତିରେ କରାଯିବ। ଏଠାରେ କେବଳ ଏତିକି କୁହାଯାଇପାରେ ଯେ ଗୋଟିଏ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ସହ ସମାନ ହେଲେ ଚାପଟିର କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣର ରେଡ଼ିଆନ୍ ପରିମାଣ 1 ଅଟେ ଏବଂ ଏହାର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାଣ $\left(\frac{180}{\pi}\right)$ ଅଟେ।

$\overset{\frown}{AXP}$ ଓ $\overset{\frown}{PYB}$ ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ଚାପ ଏବଂ P ସେମାନଙ୍କର ସାଧାରଣ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ (ଚିତ୍ର 7.22) ସେମାନଙ୍କ ସଂଯୋଗ (Union)ରେ ଗଠିତ $\overset{\frown}{APB}$ର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଚାପଦ୍ୱୟ $\overset{\frown}{AXP}$ ଓ $\overset{\frown}{PYB}$ର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ସମଷ୍ଟି ହେବ। ଅର୍ଥାତ୍ $m\overset{\frown}{APB} = m\overset{\frown}{AXP} + m\overset{\frown}{PYB}$। ଏହାର ପ୍ରମାଣ ଦୀର୍ଘ ଥିବାରୁ ଏଠାରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇନାହିଁ। ତେବେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରାଯାଇପାରେ ଯେ $\overset{\frown}{AXP} \cup \overset{\frown}{PYB} = \overset{\frown}{APB}$ର ତିନୋଟି ସମ୍ଭାବନା ରହିଅଛି।



[ଚିତ୍ର 7.22]

(i) $\overset{\frown}{APB}$ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ

(ii) $\overset{\frown}{APB}$ ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ

(iii) $\overset{\frown}{APB}$ ଏକ ବୃହତ୍ ଚାପ।

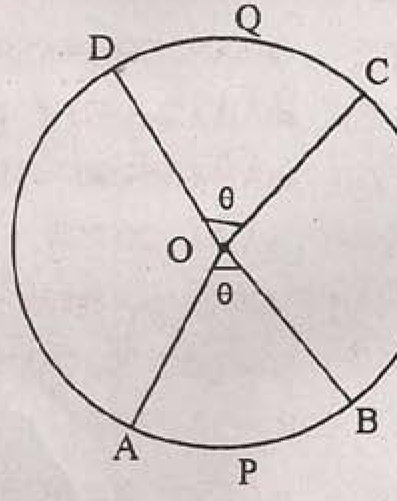
ଏବଂ ସମ୍ଭାବନା (i) କ୍ଷେତ୍ରରେ ସନ୍ନିହିତ ଚାପଦ୍ୱୟର କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣମାନେ ସନ୍ନିହିତ କୋଣ ହେବେ।

7.5. ଚାପର ସର୍ବସମତା (Congruence of arcs) :

ସଂଜ୍ଞା : ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ (ଅଥବା ଦୁଇ ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତରେ) ଦୁଇଟି ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ସମାନ ହେଲେ ଚାପ ଦୁଇଟିକୁ ସର୍ବସମ (Congruent) ଚାପ କୁହାଯାଏ।

ଚିତ୍ର 7.23ରେ $m\angle AOB = m\angle COD$

$\Leftrightarrow \overset{\frown}{APB} \cong \overset{\frown}{CQD}$ ।



[ଚିତ୍ର 7.23]

ଏଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ –

(i) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପର କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ଏବଂ ବିପରୀତକ୍ରମେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପର କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେଲେ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେବେ।

(ii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ସର୍ବସମ ହେଲେ ସେମାନଙ୍କର ବୃହତ୍‌ଚାପଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟ ସର୍ବସମ ହେବେ।

(iii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ସର୍ବସମ।

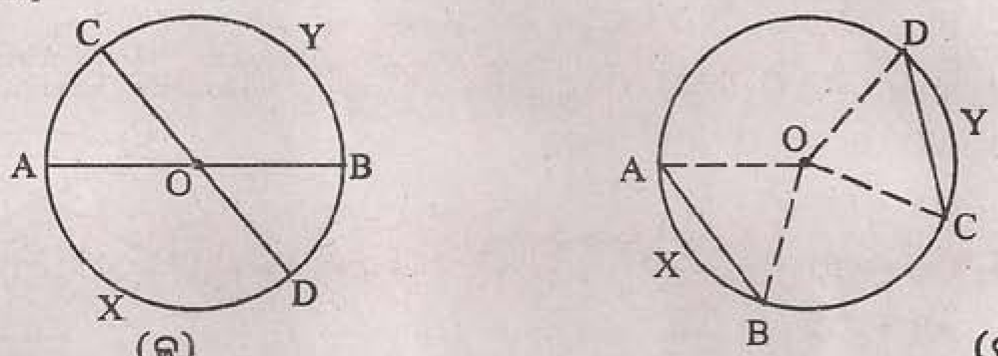
ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟ (i) ରୁ (iii) ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ।

ପରିମିତିରେ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମ୍ପର୍କୀୟ ଆଲୋଚନା ହୋଇଅଛି। ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଚାପର କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ସହ ସମାନୁପାତିକ। କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ପରିମାଣର ବୃଦ୍ଧି ଓ ହ୍ରାସ ସହିତ ଚାପର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ବୃଦ୍ଧି ଓ ହ୍ରାସ ଘଟିଥାଏ। ଏହି ପରିପ୍ରେକ୍ଷୀରେ ଏଠାରେ ଉଲ୍ଲେଖନୀୟ ଯେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ଚାପ ସର୍ବସମ ହେଲେ ସେମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ହୁଏ ଏବଂ ବିପରୀତକ୍ରମେ ଚାପଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ହେଲେ ସେମାନେ ସର୍ବସମ ହେବେ।

ଉପପାଦ୍ୟ - ୮

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ (ଅଥବା ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତରେ) ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଚାପ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଜ୍ୟାଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ।

[Corresponding chords of two congruent arcs of a circle (or congruent circles) are congruent.]



(କ) (ଖ)

[ଚିତ୍ର 7.24]

ଦତ୍ତ : ABC ବୃତ୍ତରେ O କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ $\overset{\frown}{AXB}$ ଓ $\overset{\frown}{CYD}$ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଚାପ। ଚିତ୍ର 7.24 (କ)ରେ $\overset{\frown}{AXB}$ ଓ $\overset{\frown}{CYD}$ ଦୁଇଟି ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ଓ ଚିତ୍ର 7.24 (ଖ)ରେ ସେମାନେ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ। $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଚାପଦ୍ୱୟଙ୍କର ସମ୍ପୃକ୍ତ ଜ୍ୟା।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

ଅଙ୍କନ : $\overline{AO}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ ଏବଂ $\overline{OD}$ ଅଙ୍କନ କର।

ପ୍ରମାଣ : ଚିତ୍ର 7.24 (କ)ରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଏକା ବୃତ୍ତର ଦୁଇଟି ବ୍ୟାସ।

$\therefore AB = CD \Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{CD}$

ଚିତ୍ର 7.24 (ଖ)ରେ $\triangle OAB$ ଏବଂ $\triangle OCD$ ମଧ୍ୟରେ

$\left.\begin{array}{l} OA = OC \\ OB = OD \end{array}\right\}$ (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)

$m\angle AOB = m\angle COD$ ($\because \overset{\frown}{AXB} \cong \overset{\frown}{CYD}$, ସେମାନଙ୍କର କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାଣ ସମାନ)

ସୁତରାଂ $\Delta OAB \cong \Delta OCD$(ବାହୁ-କୋଣ-ବାହୁ) $\Rightarrow AB = CD \Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{CD}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ପ୍ରମାଣ ଅନୁରୂପ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 9

(ଉପପାଦ୍ୟ-8 ଓ ଉପପାଦ୍ୟ-9 ପରସ୍ପର ବିପରୀତ)

କୌଣସି ବୃତ୍ତର (ଅଥବା ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତର) ଦୁଇଟି ଜ୍ୟା ସର୍ବସମ ହେଲେ ସେମାନଙ୍କ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ (i) କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ଏବଂ (ii) ବୃହତ୍‌ଚାପଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ।

[If two chords of a circle (or congruent circle) are congruent, then the corresponding (i) minor arcs are congruent and (ii) major arcs are congruent]

ଦତ୍ତ : ABC ବୃତ୍ତରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଜ୍ୟା। $\overset{\frown}{AXB}$ ଓ $\overset{\frown}{CYD}$ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଜ୍ୟା ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ଏବଂ ଓ $\overset{\frown}{CQD}$ ସମ୍ପୃକ୍ତ ବୃହତ୍ ଚାପ (ଚିତ୍ର 7.25)।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : (i) $\overset{\frown}{AXB}$ ଓ $\overset{\frown}{CYD}$ ଚାପଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ଏବଂ (ii) $\overset{\frown}{APB}$ ଓ $\overset{\frown}{CQD}$ ଚାପଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ।

ଅଙ୍କନ : ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ହେଲେ $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ ଏବଂ $\overline{OD}$ ଅଙ୍କନ କର।

ପ୍ରମାଣ : ΔOAB ଏବଂ ΔOCD ମଧ୍ୟରେ

$\left.\begin{array}{l} OA = OC \\ OB = OD \end{array}\right\}$ (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)

$AB = CD$ ($\because \overline{AB} \cong \overline{CD}$)

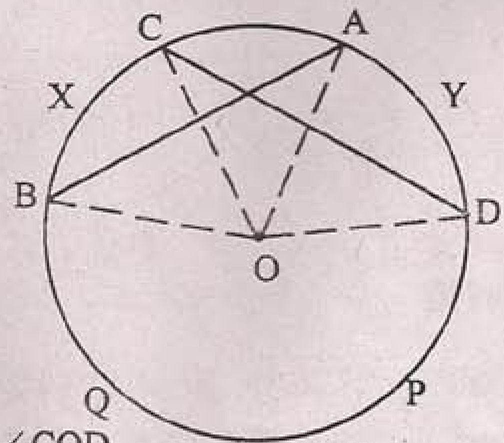
ସୁତରାଂ $\Delta OAB \cong \Delta OCD$ (ବାହୁ-ବାହୁ-ବାହୁ)

$\Rightarrow m\angle AOB = m\angle COD$ ....(1)

$\Rightarrow \overset{\frown}{AXB} \cong \overset{\frown}{CYD}$ [(i) ପ୍ରମାଣିତ]

ପୁନଶ୍ଚ, (1) $\Rightarrow 360^0 - m\angle AOB = 360^0 - m\angle COD$

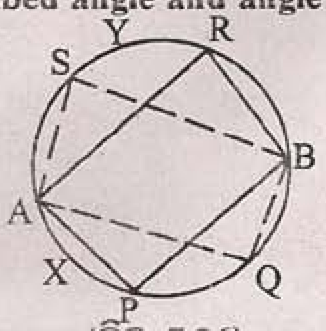
$\Rightarrow \overset{\frown}{APB} \cong \overset{\frown}{CQD}$ [(ii) ପ୍ରମାଣିତ]



[ଚିତ୍ର 7.25]

7.6. ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ଓ ପରିପୂରକ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ (Inscribed angle and angle subtended at a point on a supplementary arc) :

ଚିତ୍ର 7.26ରେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଉପରେ $\overset{\frown}{AXB}$ ଯେକୌଣସି ଏକ ଚାପ। P, $\overset{\frown}{AXB}$ ଉପରିସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ $\angle APB$କୁ $\overset{\frown}{AXB}$ର ଏକ ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ କୁହାଯାଏ। ସେହିପରି $\angle AQB$ ଉକ୍ତ ଚାପର ଅନ୍ୟ ଏକ ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ। $\overset{\frown}{AXB}$ର ବିପରୀତ ଚାପ $\overset{\frown}{AYB}$ର $\angle ARB$ ଓ $\angle ASB$ ଦୁଇଟି ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ।



(ଚିତ୍ର 7.26)

ସଂଜ୍ଞା :

A ଓ B କୌଣସି ଚାପର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ଏବଂ P ଉକ୍ତ ଚାପର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁହେଲେ $\angle APB$କୁ ଚାପର ଏକ **ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ (inscribed angle)** କୁହାଯାଏ ।

ସଂଜ୍ଞା :

ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ କୌଣସି ଚାପର ବିପରୀତ ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣକୁ ପ୍ରଥମୋକ୍ତ ଚାପର ପରିପୂରକ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ (angle subtended at a point on the supplementary arc) କୁହାଯାଏ ।

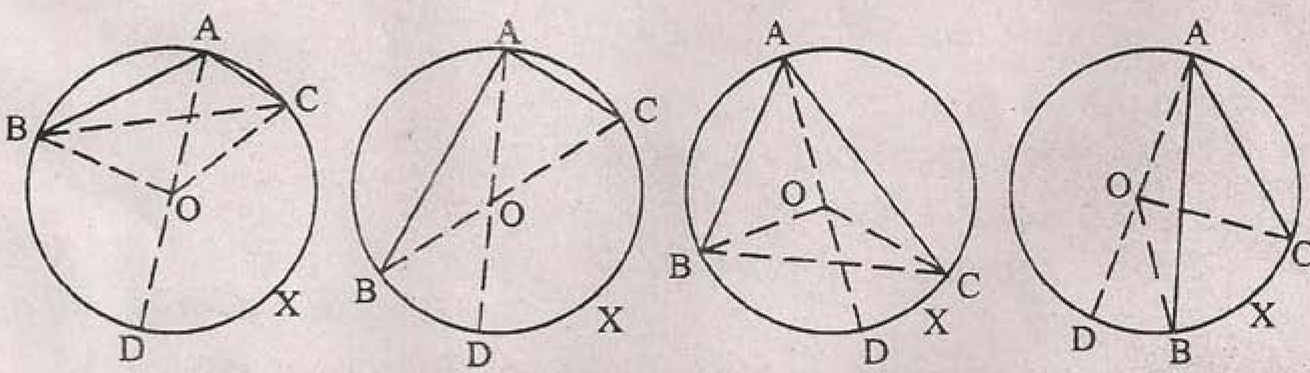
ଚିତ୍ର 7.26ରେ $\angle ARB$ ଓ $\angle ASB$, $\overparen{AXB}$ର ଦୁଇଟି ପରିପୂରକ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ଏବଂ ସେହିପରି $\angle APB$ ଓ $\angle AQB$, $\overparen{AYB}$ର ଦୁଇଟି ପରିପୂରକ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 10

ଏକ ବୃତ୍ତରେ କୌଣସି ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣର ପରିମାଣ ଏହାର ବିପରୀତ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ଅର୍ଦ୍ଧେକ ।

(In a circle, the measure of an inscribed angle of an arc is half the degree measure of the opposite arc.]

ଦତ୍ତ : ABC ବୃତ୍ତରେ O କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ $\overparen{BAC}$ ଏକ ଚାପ । $\angle BAC$, $\overparen{BAC}$ରେ ଏକ ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ । $\overparen{BXC}$, $\overparen{BAC}$ର ବିପରୀତ ଚାପ ।



(କ) (ଖ) (ଗ) (ଘ)

($\overparen{BAC}$ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ) ($\overparen{BAC}$ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ) ($\overparen{BAC}$ ବୃହତ୍ ଚାପ)

[ଚିତ୍ର 7.27]

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $m\angle BAC = \frac{1}{2} m\overparen{BXC}$

ଅଙ୍କନ : $\overrightarrow{AO}$ ବୃତ୍ତକୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରୁ । $\overline{BO}$, $\overline{CO}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : ଏଠାରେ ତିନିଗୋଟି ସମ୍ଭାବନା ରହିଅଛି ।

(a) $\overset{\frown}{BAC}$ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ (ଚିତ୍ର 7.27 (କ))

(b) $\overset{\frown}{BAC}$ ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ (ଚିତ୍ର 7.27 (ଖ))

(c) $\overset{\frown}{BAC}$ ଏକ ବୃହତ୍‌ଚାପ (ଚିତ୍ର 7.27 (ଗ) ଓ (ଘ))

ସମ୍ଭାବନା (a) ନିମନ୍ତେ ପ୍ରମାଣ : (ଚିତ୍ର 7.27 (କ))

ΔOBAରେ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ $\angle BOD$ ।

ସୁତରାଂ $m\angle BOD = m\angle OBA + m\angle BAO$ (ଦୂରବର୍ତ୍ତୀ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି)

$\because OB = OA$ (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)

$m\angle OBA = m\angle BAO$

$\therefore m\angle BOD = 2\, m\angle BAO$

$\Rightarrow 180^0 - m\angle BOA = 2m\angle BAO$ ....(1)

ସେହିପରି ΔOCAରୁ ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବା ଯେ

$180^0 - m\angle COA = 2m\angle CAO$ ....(2)

(1) ଓ (2)ରୁ $360^0 - (m\angle BOA + m\angle COA) = 2(m\angle BAO + m\angle CAO)$

$\Rightarrow 360^0 - m\angle BOC = 2m\angle BAC$ ....(3)

ଯେହେତୁ $\overset{\frown}{BXC}$ଟି ଏକ ବୃହତ୍ ଚାପ ($\overset{\frown}{BAC}$ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପର ବିପରୀତ), (3)ରୁ ପ୍ରମାଣିତ ହୁଏ ଯେ

$m\overset{\frown}{BXC} = 2m\angle BAC$ ଅର୍ଥାତ୍ $m\angle BAC = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{BXC}$ ।

ସମ୍ଭାବନା (b) ନିମନ୍ତେ ପ୍ରମାଣ : (ଚିତ୍ର 7.27(ଖ))

$\overset{\frown}{BAC}$ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ହେଲେ $\overset{\frown}{BXC}$ ମଧ୍ୟ ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ । ସୁତରାଂ

$m\overset{\frown}{BXC} = 180^0$ (ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ, ସଂଜ୍ଞାନୁଯାୟୀ) ....(4)

ବର୍ତ୍ତମାନ ΔBAOରେ $\angle BOD$ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ । ସମ୍ଭାବନା (a)ରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ଧାରାନୁସାରେ

$m\angle BOD = 2m\angle BAO$ ....(5)

ଏବଂ ଯେହେତୁ ΔCAOରେ $\angle COD$ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ,

$m\angle COD = 2m\angle CAO$ ....(6)

ସୁତରାଂ (5) ଓ (6)ରୁ

$m\angle BOD + m\angle COD = 2(m\angle BAO + m\angle CAO)$

$\Rightarrow 180^0 = 2m\angle BAC$ ($\angle BOD$ ଓ $\angle COD$ ଦୁହେଁ ପରିପୂରକ କୋଣ).......(7)

(4) ଓ (7)ରୁ $m\overset{\frown}{BXC} = 2m\angle BAC$

ଅର୍ଥାତ୍ $m\angle BAC = \frac{1}{2} m\overset{\frown}{BXC}$

ସମ୍ଭାବନା (c) ନିମନ୍ତେ ପ୍ରମାଣ (ଚିତ୍ର 7.27(ଗ) ଓ (ଘ))

ΔBAO ଏବଂ ΔCAOରୁ ସମ୍ଭାବନା (a)ରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ଧାରାନୁଯାୟୀ

$m\angle BOD = 2m\angle BAO$ ଏବଂ $m\angle COD = 2m\angle CAO$

$m\angle COD + m\angle BOD = 2(m\angle CAO + m\angle BAO)$

[O ବିନ୍ଦୁ $\angle BAC$ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ହେଲେ, ଚିତ୍ର (ଗ)]

କିମ୍ବା $m\angle COD - m\angle BOD = 2(m\angle CAO - m\angle BAO)$

[O ବିନ୍ଦୁ $\angle BAC$ର ବହିଃସ୍ଥ ହେଲେ ଚିତ୍ର (ଘ)]

ଉଭୟ କ୍ଷେତ୍ରରେ $m\angle BOC = 2m\angle BAC$ ....(8)

ଯେହେତୁ $\overset{\frown}{BXC}$ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ($\overset{\frown}{BAC}$ ବୃହତ୍ ଚାପର ବିପରୀତ),

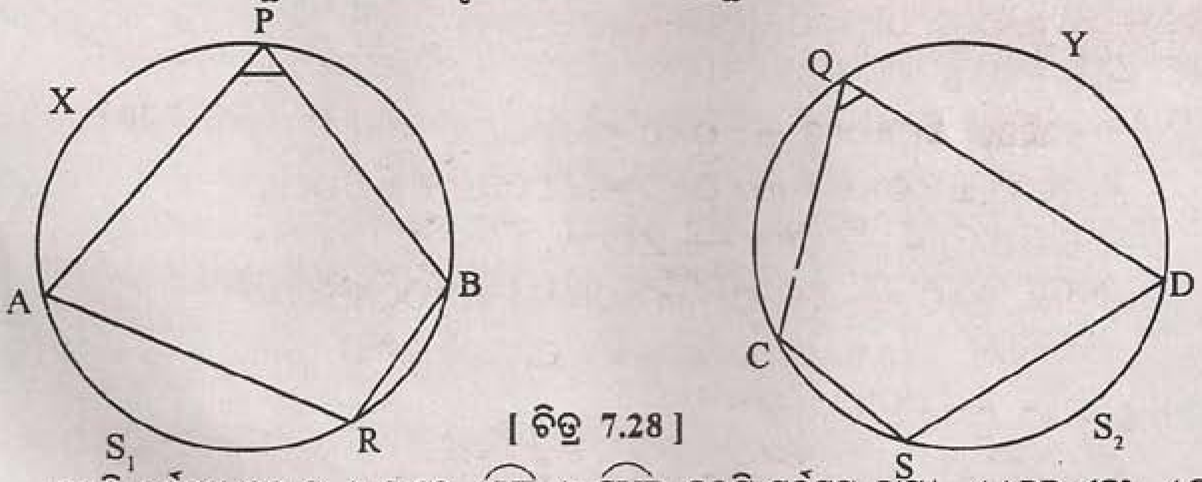
$m\overset{\frown}{BXC} = 2m\overset{\frown}{BAC}$ ((8)ରୁ) ଅର୍ଥାତ୍ $m\angle BAC = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{BXC}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉପରୋକ୍ତ ଉପପାଦ୍ୟର ଏକ ବିକଳ୍ପ କଥନ : **ଏକ ବୃତ୍ତରେ କୌଣସି ଚାପର ପରିପୂରକ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣର ପରିମାଣ ଏହାର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ଅର୍ଦ୍ଧେକ।**

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 : (i) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଦୁଇଟି କୋଣ ସର୍ବସମ।

(ii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଚାପର ବିପରୀତ ଚାପଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଦୁଇଟି କୋଣ ସର୍ବସମ।

ଏହା ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ ନିମନ୍ତେ ମଧ୍ୟ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ।



[ଚିତ୍ର 7.28]

ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2ରେ $\overset{\frown}{AXB}$ ଓ $\overset{\frown}{CYD}$ ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ଚାପ। $\angle APB$ ଏବଂ $\angle CQD$ ଯଥାକ୍ରମେ ଦୁଇଟି ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ହେଲେ $\angle APB \cong \angle CQD$ ହେବ (ପ୍ରମାଣ କର)। ପୁନଶ୍ଚ $\overset{\frown}{AXB}$ ଓ $\overset{\frown}{CYD}$ର ବିପରୀତ ଚାପଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଦୁଇଟି କୋଣ $\angle ARB$ ଏବଂ $\angle CSD$ ସର୍ବସମ ଅଟନ୍ତି।

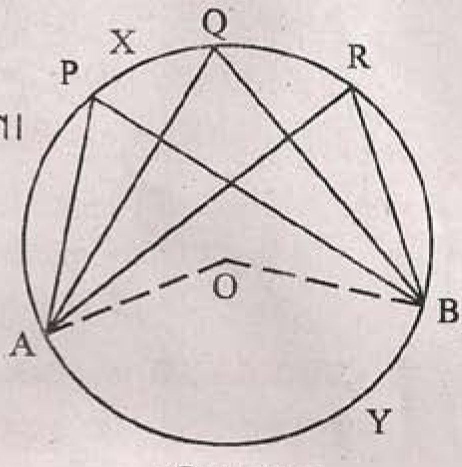
ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 : ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ କୌଣସି ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣଗୁଡ଼ିକ ସର୍ବସମ।

ପ୍ରକାରାନ୍ତରେ, ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ କୌଣସି ଚାପର ପରିପୂରକ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣଗୁଡ଼ିକ ସର୍ବସମ। ଚିତ୍ର 7.29ରେ $\overset{\frown}{AXB}$ ଚାପର ଯେ କୌଣସି ତିନୋଟି ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ $\angle APB$, $\angle AQB$ ଓ $\angle ARB$

ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକର ପରିମାଣ ବିପରୀତ ଚାପ $\widehat{AYB}$ର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ଅର୍ଦ୍ଧେକ। ସୁତରାଂ

$m\angle APB = m\angle AQB = m\angle ARB = \frac{1}{2} m\widehat{AYB}$

$\Rightarrow$ $\widehat{AYB}$ର ପରିପୂରକ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣଗୁଡ଼ିକ ସର୍ବସମ।



[ଚିତ୍ର 7.29]

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 3 : ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ଏକ ସମକୋଣ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 4 : କୌଣସି ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ଏକ ସମକୋଣ ହେଲେ ଚାପଟି ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ।

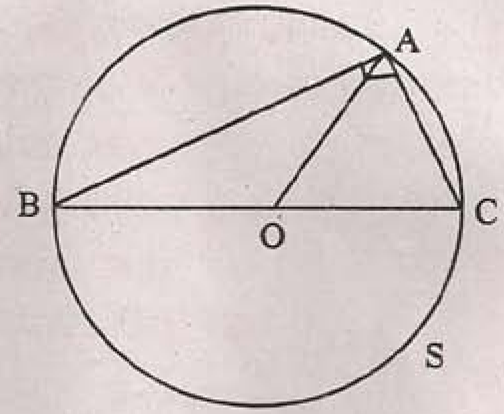
ଉପପାଦ୍ୟ-10ର ପ୍ରମାଣ ଅନ୍ତର୍ଗତ ସମ୍ଭାବନା (b)ରୁ ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ। ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ-3 ଓ ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ-4ର ଗୁରୁତ୍ୱ ଦୃଷ୍ଟିରୁ ଏହାର ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପ୍ରମାଣ ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ହୋଇଅଛି।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ-3ର ପ୍ରମାଣ :

ଦତ୍ତ : S ବୃତ୍ତରେ BAC ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\angle BAC$ ଏକ ସମକୋଣ।

ଅଙ୍କନ : O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେଲେ $\overline{OA}$, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ ଅଙ୍କନ କର।



[ଚିତ୍ର 7.30]

ପ୍ରମାଣ : $\widehat{BAC}$ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ ହେତୁ $\overline{BC}$ ଏକ ବ୍ୟାସ

ΔBAOରେ OB = OA (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)

$\Rightarrow m\angle OAB = m\angle OBA$

ସେହିପରି ΔCAOରେ $m\angle OAC = m\angle OCA$

ସୁତରାଂ $m\angle OAB + m\angle OAC = m\angle OBA + m\angle OCA$

$\Rightarrow m\angle BAC = m\angle OBA + m\angle OCA$

$\Rightarrow 2m\angle BAC = m\angle BAC + m\angle OBA + m\angle OCA = 180^0$

(ΔBACର କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି) $\Rightarrow m\angle BAC = 90^0$(ପ୍ରମାଣିତ)

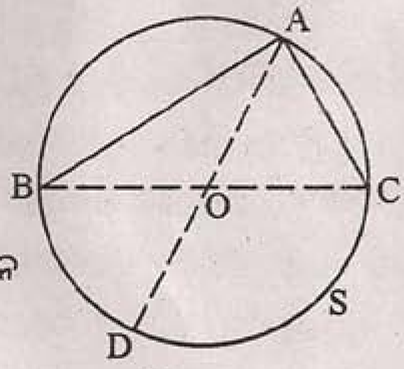
ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 4ର ପ୍ରମାଣ :

ଦତ୍ତ : S ବୃତ୍ତରେ $\angle BAC$, $\widehat{BAC}$ର ଏକ ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ଏବଂ $\angle BAC$ ଏକ ସମକୋଣ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\widehat{BAC}$ ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ।

ଅଙ୍କନ : O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେଲେ $\overline{AO}$, $\overline{BO}$, $\overline{CO}$ ଅଙ୍କନ କର। $\overrightarrow{AO}$ ବୃତ୍ତକୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ।

ପ୍ରମାଣ : ΔABOରେ OB = OA (ଏକା ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ)



[ଚିତ୍ର 7.31]

$\Rightarrow m\angle OBA = m\angle OAB$ ....(1)

$\angle BOD$, ΔABO ର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ।

ସୁତରାଂ $m\angle BOD = m\angle OBA + m\angle OAB = 2m\angle OAB$ ((1) ଦ୍ୱାରା)

ସେହିପରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇ ପାରେ ଯେ $m\angle COD = 2m\angle OAC$

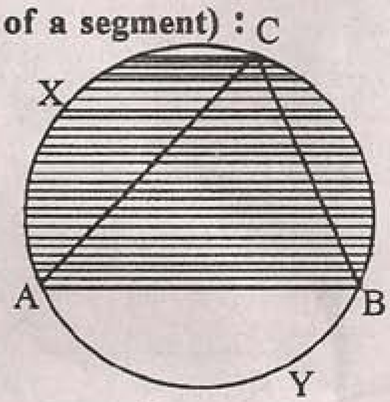
$\therefore m\angle BOD + m\angle COD = 2(m\angle OAB + m\angle OAC)$

$= 2m\angle BAC = 180^0$ ($\because m\angle BAC = 90^0$)

$\Rightarrow \overrightarrow{OB}$ ଓ $\overrightarrow{OC}$ ପରସ୍ପର ବିପରୀତ ରଶ୍ମି, ଅର୍ଥାତ୍ B, O, C ଏକରେଖୀୟ। O କେନ୍ଦ୍ର ହେତୁ $\overline{BC}$ ଏକ ବ୍ୟାସ।

$\Rightarrow \overparen{BAC}$ ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତ। (ପ୍ରମାଣିତ)

7.7. ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ, ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ କୋଣ (Segment, inscribed angle of a segment) :



[ଚିତ୍ର 7.32]

ବୃତ୍ତର ଏକ ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ ଚାପଦ୍ୱୟ $\overparen{AXB}$ ଓ $\overparen{AYB}$, $\overline{AB}$ ର ଦୁଇପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ (ଚିତ୍ର 7.32)। **$\overline{AB}$ ଜ୍ୟା, ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ କୌଣସି ଏକ ଚାପ ଏବଂ ଉକ୍ତ ଚାପ ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ବୃତ୍ତର ସମସ୍ତ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍‌କୁ ଏକ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ (Segment of a circle)** କୁହାଯାଏ। ଚିତ୍ରରେ **AXBA ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡକୁ ରେଖାଙ୍କିତ କରାଯାଇଛି। ଏହାକୁ ଏକ ବୃହତ୍ ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ (major segment)** କୁହାଯାଏ। ସେହିପରି AYBA ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡଟିକୁ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ର ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡ (minor segment) କୁହାଯାଏ।

କୌଣସି ଚାପର ଏକ ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣକୁ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଜ୍ୟାର ଉକ୍ତ ଚାପ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ କୋଣ (inscribed angle of a segment) ମଧ୍ୟ କୁହାଯାଏ। ଚିତ୍ର 7.32ରେ $\angle ACB$, AXBA ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ କୋଣ ଅଟେ, ଯେଉଁଠାରେ C ବିନ୍ଦୁଟି $\overparen{AXB}$ ଉପରିସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ।

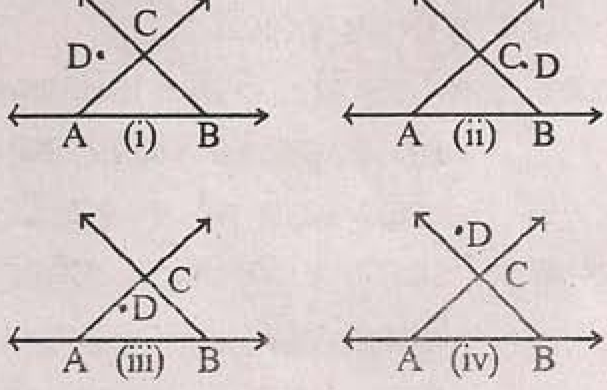
ଉପପାଦ୍ୟ-10ର ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ-2ରୁ ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ କୌଣସି ବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ ସମସ୍ତ କୋଣଗୁଡ଼ିକ ସର୍ବସମ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ-3ର ବିକଳ୍ପ କଥନ ହେଲା : **ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତଖଣ୍ଡସ୍ଥ କୋଣ ଏକ ସମକୋଣ।**

ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଚାରୋଟି ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ରହିବା ପାଇଁ ଆବଶ୍ୟକ ସର୍ତ୍ତ ଜାଣିବା ନିମନ୍ତେ ନିମ୍ନ ଉପପାଦ୍ୟଟି ପ୍ରାଥମିକ ତଥ୍ୟ ଯୋଗାଇ ଦେବ।

ପ୍ରାକ୍ ଆଲୋଚନା : A, B ଓ C ଏକ ସରଳ ରେଖାରେ ନଥିବା ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ହେଉ ଏବଂ D ବିନ୍ଦୁ $\overline{AB}$ ର C ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଉ।

D ବିନ୍ଦୁଟି $\angle ABC$ର ଅନ୍ତସ୍ଥ ହୋଇପାରେ କିମ୍ବା $\angle BAC$ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ହୋଇପାରେ ନତୁବା ଏହି ଦୁଇ କୋଣ ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସିଟିର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ନ ହୋଇପାରେ (ଚିତ୍ର ଦେଖ)। ଏଠାରେ D ବିନ୍ଦୁଟି $\overrightarrow{AC}$ ଓ $\overrightarrow{BC}$ ଉପରିସ୍ଥ ହେବାର ସମ୍ଭାବନାକୁ ବାଦ୍ ଦିଆଯାଇଛି।



[ଚିତ୍ର 7.33]

[164]

ଉପପାଦ୍ୟ - 11

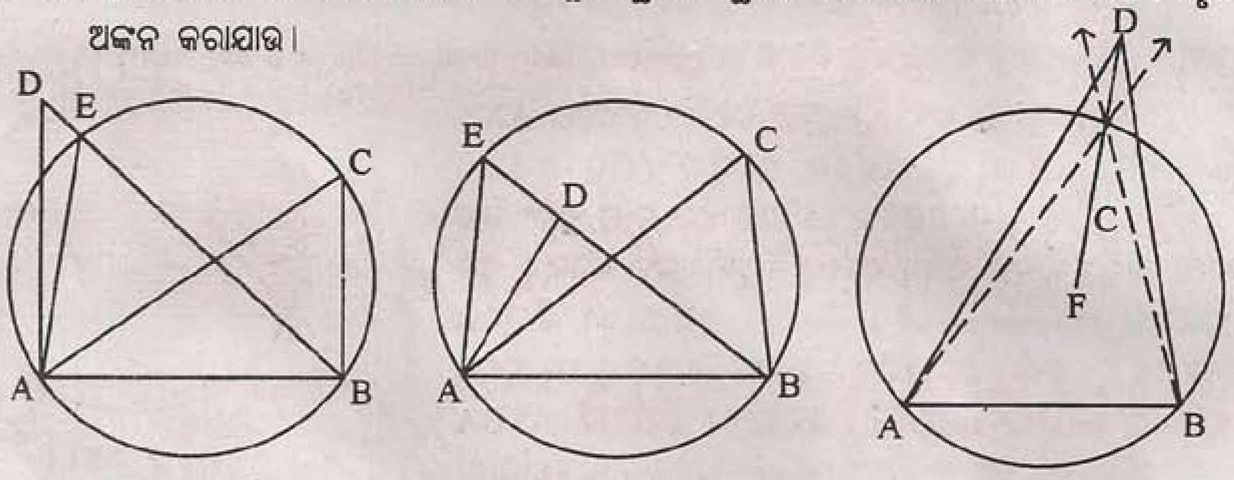
ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ତାର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅନ୍ୟ ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବା କୋଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେଲେ ବିନ୍ଦୁ ଚାରିଟି ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ରହିବେ।

[If the angles subtended by a line segment joining two points at two other points on the same side of the segment are congruent, then the four points are concyclic.]

ଦତ୍ତ : C ଓ D ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ $\overline{AB}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ଏବଂ $m\angle ADB = m\angle ACB$।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : A, B, C ଓ D ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ।

ଅଙ୍କନ : A, B ଓ C ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ନୁହନ୍ତି। ସୁତରାଂ ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟଦେଇ ABC ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ।



(କ) (ଖ) (ଗ)

[ଚିତ୍ର 7.33(a)]

ବର୍ତ୍ତମାନ D, $\overline{AB}$ ର C ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁ। ଏହାର ଅବସ୍ଥିତିର ତିନୋଟି ସମ୍ଭାବନା ହେଲା :

(i) D ବିନ୍ଦୁ $\angle ABC$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ହେବ (ଚିତ୍ର 7.33(a) (କ) ଓ (ଖ))।

(ii) D ବିନ୍ଦୁ $\angle BAC$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ହେବ।

(iii) ସମ୍ଭାବନା (i) ଓ (ii)ରୁ କେଉଁଟି ନୁହେଁ (ଚିତ୍ର 7.33(a) (ଗ))

ସମ୍ଭାବନା (i) ନିମନ୍ତେ ପ୍ରମାଣ :

ଅଙ୍କନ : $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ ଓ $\overline{BD}$ ଅଙ୍କନ କର। D, ABC ବୃତ୍ତର ବହିର୍ଦ୍ଦେଶରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଲେ $\overline{BD}$ ଓ ବୃତ୍ତର ଛେଦବିନ୍ଦୁ E ହେଉ (ଚିତ୍ର 7.33(a)(କ)) ଏବଂ D, ABC ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତର୍ଦ୍ଦେଶରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଲେ $\overrightarrow{BD}$ ବୃତ୍ତକୁ E ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ (ଚିତ୍ର 7.33(a)(ଖ))। $\overline{AE}$ ଅଙ୍କନ କର।

ପ୍ରମାଣ : ଯେହେତୁ E ବିନ୍ଦୁ $\overparen{ACB}$ ଉପରିସ୍ଥ, $\angle AEB$ ଏବଂ $\angle ACB$ ଉକ୍ତ ଚାପର ଦୁଇଟି ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ।

$\therefore m\angle AEB = m\angle ACB$ (ଉପପାଦ୍ୟ-10ର ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ-2) ....(i)

ΔADEରେ $\angle$AEB ବହିଃସ୍ଥ (ଚିତ୍ର 7.33(a)(କ)) କିମ୍ବା $\angle$ADB ବହିଃସ୍ଥ (ଚିତ୍ର 7.33(a)(ଖ))।

ସୁତରାଂ $m\angle ADB \neq m\angle AEB$

କିନ୍ତୁ ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ $m\angle ADB = m\angle ACB = m\angle AEB$ ((i) ଦ୍ୱାରା)

D ଓ E ଦୁଇଟି ପୃଥକ୍ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ଏହା ଅସମ୍ଭବ କାରଣ B, D, E ଏକରେଖୀ।

D = E ଏବଂ A, B, C ଓ D ଏକ ବୃତ୍ତରେ ଅବସ୍ଥିତ।

ସମ୍ଭାବନା (ii)ର ପ୍ରମାଣ ସମ୍ଭାବନା (i) ର ପ୍ରମାଣର ଅନୁରୂପ ହେବ।

ସମ୍ଭାବନା (iii)ର ପ୍ରମାଣ :

ଅଙ୍କନ : ବର୍ତ୍ତମାନ D ବିନ୍ଦୁ $\overrightarrow{BC}$ ଓ $\overrightarrow{AC}$ ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ କୋଣର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ହେବ। ଏଠାରେ ଉଲ୍ଲେଖନୀୟ ଯେ ଉପପାଦ୍ୟର ସର୍ତ୍ତାନୁଯାୟୀ D ବିନ୍ଦୁ $\overrightarrow{BC}$ ବା $\overrightarrow{AC}$ ଉପରିସ୍ଥ ହେବନାହିଁ। $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$ ଏବଂ $\overline{DC}$ ଅଙ୍କନ କର। $\overrightarrow{DC}$ ଉପରେ F ବିନ୍ଦୁ ନିଅ ଯେପରି D-C-F ହେବ। (ଅର୍ଥାତ୍ C, D ଓ Fର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ହେବ) (ଚିତ୍ର 7.33(a)(ଗ))।

ପ୍ରମାଣ : ΔADC ରେ $\angle$ACF ବହିଃସ୍ଥ $\Rightarrow m\angle ADC < m\angle ACF$।

ସେହିପରି ΔBDCରେ $\angle$BCF ବହିଃସ୍ଥ $m\angle BDC < m\angle BCF$।

ସୁତରାଂ $m\angle ADC + m\angle BDC < m\angle ACF + m\angle BCF$

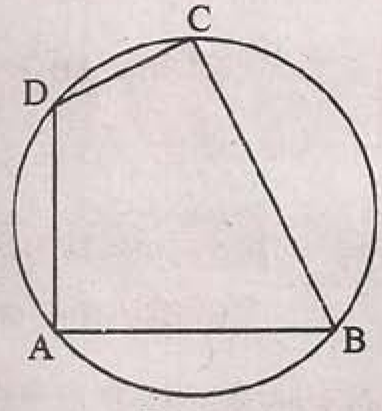
$\Rightarrow m\angle ADB < m\angle ACB$

କିନ୍ତୁ ଦତ୍ତ ଅଛି ଯେ $m\angle ADB = m\angle ACB$। D ଓ C ଭିନ୍ନ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ଏହା ଅସମ୍ଭବ।

$\Rightarrow$ D = C ଅର୍ଥାତ୍ A, B, C ଓ D ଏକ ବୃତ୍ତରେ ଅବସ୍ଥିତ। (ପ୍ରମାଣିତ)

7.8. ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ (Cyclic Quadrilateral) :

ସଂଜ୍ଞା : ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜକୁ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ କୁହାଯାଏ।



[ଚିତ୍ର 7.34]

ଚିତ୍ର 7.34ରେ ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ। ସର୍ବଦା କୌଣସି ଚତୁର୍ଭୁଜ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହୋଇ ନପାରେ। ଯଦି ଚତୁର୍ଭୁଜ ABCD ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହୁଏ ତେବେ ଉପପାଦ୍ୟ-10, ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ-2 ଅନୁଯାୟୀ $\overline{AB}$ C ଓ D ଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବା କୋଣ $\angle$ADB ଏବଂ $\angle$ACB ସର୍ବସମ ହେବେ। ପୁନଶ୍ଚ ଉପପାଦ୍ୟ-11 ଅନୁଯାୟୀ $\overline{AB}$ ଏହାର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା C ଓ D ଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବା କୋଣଦ୍ୱୟ $\angle$ADB ଏବଂ $\angle$ACB ସର୍ବସମ ହେଲେ A, B, C ଓ D ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ରହିବେ। ସୁତରାଂ ଏକ ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ ABCD ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହେବ ଯଦି ଏବଂ କେବଳ ଯଦି $\overline{AB}$, C ଓ D ଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବା କୋଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେବେ।

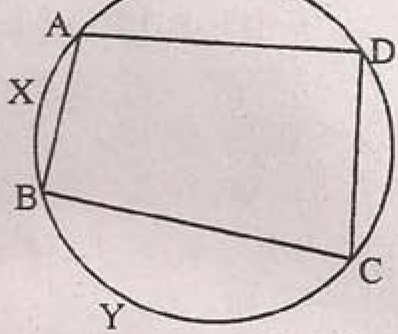
ଯେ କୌଣସି ଚତୁର୍ଭୁଜ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହେବା ନିମନ୍ତେ ଏକ ଆବଶ୍ୟକ ତଥ୍ୟ ନିମ୍ନ ଉପପାଦ୍ୟରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ହୋଇଅଛି।

ଉପପାଦ୍ୟ - 12

ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜର ବିପରୀତ କୋଣମାନ ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ।

[The opposite angles of a cyclic quadrilateral are supplementary.]

ଦତ୍ତ : ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ।



[ଚିତ୍ର 7.35]

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : (i) $m\angle B + m\angle D = 180^0$

(ii) $m\angle A + m\angle C = 180^0$

ପ୍ରମାଣ : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରନ୍ତି।

(ପ୍ରମାଣ ନିମନ୍ତେ ମନ୍ତବ୍ୟ ଦେଖ।) ସୁତରାଂ B ଓ D ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ $\overline{AC}$ ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ।

$\Rightarrow \overset{\frown}{ABC}$ ଓ $\overset{\frown}{ADC}$ ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ବିପରୀତ ଚାପ। ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ସଂଜ୍ଞାନୁସାରେ

$$m\overset{\frown}{ABC} + m\overset{\frown}{ADC} = 360^0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\overset{\frown}{ABC} + \frac{1}{2}m\overset{\frown}{ADC} = 180^0 \quad \text{..........(i)}$$

କିନ୍ତୁ $m\angle ADC = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{ABC}$

ଏବଂ $m\angle ABC = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{ADC}$ } (ଉପପାଦ୍ୟ-10)

$\therefore m\angle ADC + m\angle ABC = \frac{1}{2}m\overset{\frown}{ABC} + \frac{1}{2}m\overset{\frown}{DC} = 180^0$ ((i) ଦ୍ୱାରା)

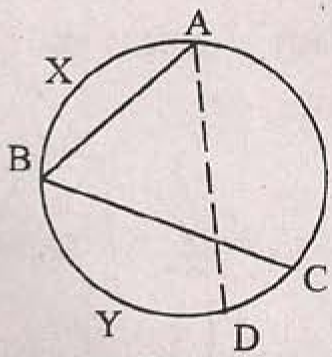
$\Rightarrow \quad m\angle D + m\angle B = 180^0$

ସେହିପରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରେ ଯେ $\overset{\frown}{BAD}$ ଓ $\overset{\frown}{ACD}$ ଚାପଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ବିପରୀତ

$\Rightarrow m\angle A + m\angle C = 180^0$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ମନ୍ତବ୍ୟ : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହେଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରନ୍ତି।

ପ୍ରମାଣ : ଯଦି A, B, C ଓ D ବିନ୍ଦୁମାନେ ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ହୁଅନ୍ତି ଏବଂ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ ନ କରନ୍ତି ତେବେ B ଓ D ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ $\overline{AC}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ରହିବେ। ଅର୍ଥାତ୍ D, $\overset{\frown}{ABC}$ ଉପରିସ୍ଥ ହେବ। ତେଣୁ D ବିନ୍ଦୁ $\overset{\frown}{AXB}$ କିମ୍ବା $\overset{\frown}{BYC}$ ଉପରିସ୍ଥ ହେବ। ମନେକର D, $\overset{\frown}{BYC}$ରେ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ (ଚିତ୍ର 7.36)। A, $\overset{\frown}{ABC}$ର ଏକ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ହୋଇଥିବା ହେତୁ $\overset{\frown}{BYC}$ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ହେବନାହିଁ।



[ଚିତ୍ର 7.36]

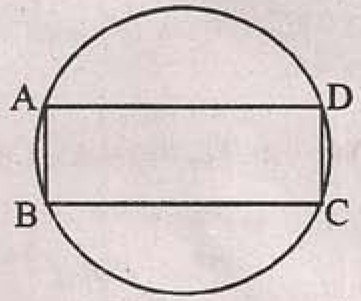
$\Rightarrow$ A ଓ D $\overline{BC}$ ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ହେବ।

$\Rightarrow$ $\overline{AD}$ ଓ $\overline{BC}$ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରିବେ, ଯାହାକି ଚତୁର୍ଭୁଜର ସଂଜ୍ଞାନୁଯାୟୀ ଅସମ୍ଭବ। ତେଣୁ D, $\widehat{BYC}$ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ନୁହେଁ।

ଯଦି D, $\widehat{AXB}$ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ହେବ ତେବେ ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରଣାଳୀରେ ଦର୍ଶାଯାଇପାରିବ ଯେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରିବେ ଯାହା ପୁନଶ୍ଚ ଚତୁର୍ଭୁଜର ସଂଜ୍ଞାନୁଯାୟୀ ଅସମ୍ଭବ।

ଉପରୋକ୍ତ ବିରୋଧାଭାଷ ପ୍ରମାଣ କରୁଛି ଯେ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରିବେ। (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 : ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ଏକ ଆୟତ ଚିତ୍ର।



[ଚିତ୍ର 7.37]

ପ୍ରମାଣ : ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର।

$\Rightarrow m\angle A = m\angle C$

କିନ୍ତୁ $m\angle A + m\angle C = 180^0$

$\Rightarrow 2m\angle A = 180^0 \Rightarrow m\angle A = 90^0$।

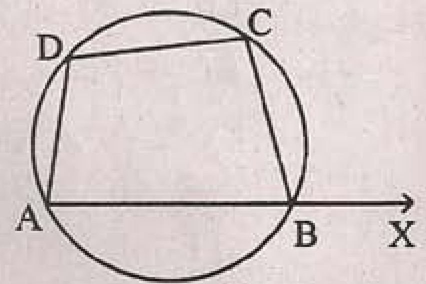
ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ଗୋଟିଏ କୋଣ ସମକୋଣ।

$\Rightarrow$ ABCD ଏକ ଆୟତ ଚିତ୍ର।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 : ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ରମ୍ବସ ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ-1 ଅନୁଯାୟୀ ରମ୍ବସର ଗୋଟିଏ କୋଣ ଏକ ସମକୋଣ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 3 : ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଗୋଟିଏ ବହିସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ଏହାର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିପରୀତ କୋଣର ପରିମାଣ ସହ ସମାନ।



[ଚିତ୍ର 7.38]

[ସୂଚନା : $\angle CBX$ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ହେଲେ,

$m\angle CBX + m\angle ABC = 180^0$

କିନ୍ତୁ $m\angle ADC + m\angle ABC = 180^0 \Rightarrow m\angle CBX = m\angle ADC$]

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 4 : ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜର କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 360^0।

ଉପପାଦ୍ୟ - 13

(ଉପପାଦ୍ୟ-12ର ବିପରୀତ ଉପପାଦ୍ୟ)

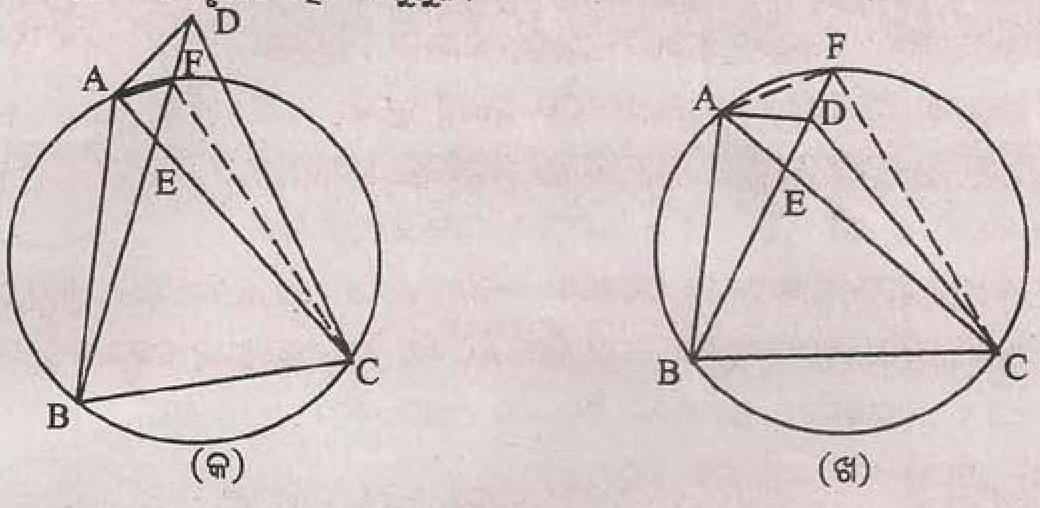
ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ବିପରୀତ କୋଣମାନ ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ ହେଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ।

[If the opposite angles of a quadrilateral are supplementary, then the quadrilateral is cyclic.]

ଦତ୍ତ : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ

$m\angle BAD + m\angle BCD = 180^0 = m\angle ABC + m\angle ADC$।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ।



[ଚିତ୍ର 7.39]

ପ୍ରମାଣ : ମନେକର ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ନୁହେଁ। ତେବେ A, B ଓ C ମଧ୍ୟଦେଇ ଅଙ୍କିତ ବୃତ୍ତ ଉପରେ D ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ ହେବନାହିଁ। ସୁତରାଂ D ବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ (ଚିତ୍ର 7.39 (କ)) କିମ୍ବା ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ (ଚିତ୍ର 7.39(ଖ)) ହେବ।

ଉଭୟ କ୍ଷେତ୍ରରେ

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = (m\angle A + m\angle C) + (m\angle B + m\angle D)$$
$$= 180^0 + 180^0 \text{ (ଦତ୍ତ) } = 360^0$$

$\therefore$ ABCD ଏକ ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଓ ଏହାର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରିବେ। E ବିନ୍ଦୁ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ ହେଉ।

$\therefore$ E ବିନ୍ଦୁ ABC ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ହେବ। (ଉପପାଦ୍ୟ-2, ପ୍ରଶ୍ନ-1)

ସୁତରାଂ $\overrightarrow{BE}$ ABC ବୃତ୍ତକୁ ଏକ ବିନ୍ଦୁ Fରେ ଛେଦ କରିବ। ବର୍ତ୍ତମାନ ଦୁଇଟି ସମ୍ଭାବନା :

(i) E-F-D (ଚିତ୍ର 7.39(କ)) ଓ (ii) E-D-F (ଚିତ୍ର 7.39(ଖ)) ମଧ୍ୟରୁ ସମ୍ଭାବନା (i)ର ପ୍ରମାଣ : (ଚିତ୍ର 7.39 (କ))

ଯେହେତୁ E ବିନ୍ଦୁ $\angle ADC$ ଏବଂ AFCର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଏବଂ $\overline{BD}$ ଉପରିସ୍ଥ।

$$\left.\begin{array}{l} m\angle ADC = m\angle ADB + m\angle BDC \\ \text{ଏବଂ } m\angle AFC = m\angle AFB + m\angle BFC \end{array}\right\} \text{(କୋଣ ସମଷ୍ଟି ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ)} \quad ....(1)$$

ବର୍ତ୍ତମାନ ABCF ଚତୁର୍ଭୁଜ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ।

$\Rightarrow m\angle ABC + m\angle AFC = 180^0$

କିନ୍ତୁ $m\angle ABC + m\angle ADC = 180^0$ (ଦତ୍ତ)

$\Rightarrow m\angle AFC = m\angle ADC$ ....(2)

ΔADFରେ $\angle AFB$ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ $\Rightarrow m\angle AFB > m\angle ADF$

ସେହିପରି ΔCDFରେ $m\angle CFB$ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ $m\angle CFB > m\angle CDF$

$m\angle AFB + m\angle CFB > m\angle ADF + m\angle CDF$

$m\angle AFC > m\angle ADC$ [(i) ଦ୍ୱାରା] ....(3)

(2) ଓ (3) ପରସ୍ପର ବିରୋଧୀ।

ସୁତରାଂ ଆମେ ଗ୍ରହଣ କରିଥିବା ପ୍ରାରମ୍ଭିକ ଉକ୍ତିଟି ଠିକ୍ ନୁହେଁ। ଅର୍ଥାତ୍ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହେବ।

ସମ୍ଭାବନା (ii) କ୍ଷେତ୍ରରେ ଅନୁରୂପ ପ୍ରମାଣ ଚିତ୍ର 7.39 (ଖ) ସାହାଯ୍ୟରେ ଦିଆଯାଇ ପାରିବ।

(ପ୍ରମାଣିତ)

ବୃତ୍ତ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ବିଭିନ୍ନ ଆଲୋଚନା ବେଳେ ତ୍ରିଭୁଜମାନେ ସଂଶ୍ଳିଷ୍ଟ ଥିଲେ ଅନେକ ସମୟରେ ତ୍ରିଭୁଜର ସାଦୃଶ୍ୟ (similarity) ବିଷୟରେ ଧାରଣା ରଖିବା ଆବଶ୍ୟକ ହୁଏ। ଏଥିନିମନ୍ତେ କେତୋଟି ଉପାଦେୟ ତଥ୍ୟ ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ହୋଇଅଛି।

ସଂଜ୍ଞା : ଦୁଇଟି ତ୍ରିଭୁଜ ΔABC ଓ ΔPQR ମଧ୍ୟରେ

(i) $m\angle A = m\angle P$, $m\angle B = m\angle Q$, $m\angle C = m\angle R$ ଏବଂ

(ii) $\dfrac{AB}{PQ}=\dfrac{BC}{QR}=\dfrac{CA}{RP}$ ହେଲେ

ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟ ସଦୃଶ ଅଟନ୍ତି। ABC ଓ PQR Δଦ୍ୱୟ ସଦୃଶ ହେଲେ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ବୋଲି ଲେଖାଯାଏ।

ତଥ୍ୟ-1 : ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିକୋଣ ଅନ୍ୟ ଏକ ତ୍ରିଭୁଜର ତିନିକୋଣ ସହ ସର୍ବସମ ହେଲେ ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟ ସଦୃଶ ଅଟନ୍ତି। (ପ୍ରକୃତ ପକ୍ଷେ ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇଟି କୋଣ ଅନ୍ୟ ତ୍ରିଭୁଜର ଦୁଇକୋଣ ସହ ସର୍ବସମ ହେଲେ ତୃତୀୟ କୋଣଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟ ସର୍ବସମ ହେବେ।)

ତଥ୍ୟ-2 : ଦୁଇଟି ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜରେ ଅନୁରୂପ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ (ଅର୍ଥାତ୍ ସର୍ବସମ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁମାନେ) ସମାନୁପାତୀ ଅଟନ୍ତି।

ତଥ୍ୟ-3 : ଦୁଇଟି ସର୍ବସମ ତ୍ରିଭୁଜ ସଦୃଶ ଅଟନ୍ତି।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 7(b)

'କ' - ବିଭାଗ

1. ଠିକ୍ ଥିଲେ T ଓ ଭୁଲ୍ ଥିଲେ F ଲେଖ।

(i) ଏକ ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ତିନିଗୋଟି ଦତ୍ତବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟରୁ ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟିକୁ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ନେଲେ ଆମେ ସର୍ବାଧିକ ଛଅଗୋଟି ଚାପ ପାଇବା।

(ii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଦୁଇଟି ଚାପର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ସମାନ ହେଲେ ଚାପଦୁଇଟି ସର୍ବସମ।

(iii) ଦୁଇଟି ସନ୍ନିହିତ ଚାପ ସର୍ବସମ ହୋଇପାରିବେ ନାହିଁ।

(iv) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଥିବା ଏକାଧିକ ଚାପମାନଙ୍କର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ସମଷ୍ଟି ସର୍ବଦା 360°ରୁ କମ୍ ହେବ।

(v) ଦୁଇଟି ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ସମଷ୍ଟି 360° ହେଲେ ଚାପ ଦୁଇଟି ପରସ୍ପରର ବିପରୀତ ଚାପ ହେବେ।

(vi) ଗୋଟିଏ ଚାପ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଅସଂଖ୍ୟ ପରିପୂରକ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ରହିଅଛି।

(vii) ଗୋଟିଏ ଚାପରେ ଅସଂଖ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ ରହିଅଛି।

(viii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ କୌଣସି ଏକ ଚାପର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ନୁହେଁ।

(ix) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ଏହାର କୌଣସି ଏକ ଚାପର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହୋଇପାରେ।

(x) ବୃତ୍ତ ଏକ ଉତ୍ତଳ ସେଟ୍ ନୁହେଁ।

(xi) ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ଜ୍ୟା ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣ ସର୍ବଦା ଅସମାନ।

(xii) ଦୁଇଟି କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଜ୍ୟାମାନେ ସମାନ୍ତର ହେଲେ ଗୋଟିଏ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ଅନ୍ୟଟିର ଉପସେଟ୍ ହେବ।

(xiii) ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ରମ୍ବସ ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର ଅଟେ।

2. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର।

(i) ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ——— ଡିଗ୍ରୀରୁ କମ୍।

(ii) ଗୋଟିଏ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁ ଏହାର ପରିବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବା କୋଣର ପରିମାଣ ——— ଅଟେ।

(iii) ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ପଞ୍ଚଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁ ଏହାର ପରିବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁଥିବା କୋଣ ପରିମାଣ ——— ଅଟେ।

(iv) $\overset{\frown}{APB}$ ଏକ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ଓ O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ହେଲେ ———କୁ $\overset{\frown}{APB}$ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ କୁହାଯାଏ।

(v) ଏକ ଅର୍ଦ୍ଧବୃତ୍ତର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ———।

(vi) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଏକ ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ଏକ ସମକୋଣ ହେଲେ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଜ୍ୟା ଓ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ଦୈର୍ଘ୍ୟାନୁପାତ ——— ହେବ।

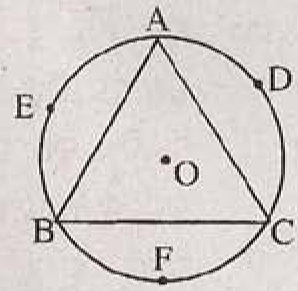
(vii) ABCD ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ। $\overset{\frown}{BAD}$ ଚାପାନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ପରିମାଣ 130°। P, $\overset{\frown}{BCD}$ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ $m\angle BPD =$ ———।

(viii) ଏକ ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ଏକ ସମକୋଣ ହେଲେ ଉକ୍ତ ଚାପର ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ ——— କୁହାଯାଏ।

(ix) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ ଏକ ଜ୍ୟାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ସହ ସମାନ ହେଲେ ଉକ୍ତ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ ବୃହତ୍ ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ପରିମାଣ ———।

(x) ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ। $\angle BAD$ ——— ଚାପର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପର ଅର୍ଦ୍ଧେକ।

'ଖ' - ବିଭାଗ



[ଚିତ୍ର 7.40]

3. ଚିତ୍ର 7.40ରେ ΔABC ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଏବଂ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣୀ। D,E,F ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ।

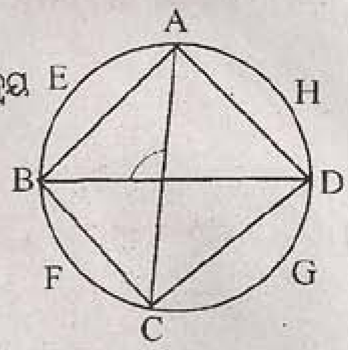
(i) $\angle A$ କେଉଁ ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଓ $\angle A$ ଦ୍ୱାରା କେଉଁ ଚାପ ଛେଦିତ?

(ii) $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ ବୃହତ୍‌ଚାପ କିଏ ଓ ଏହି ଚାପର ବିପରୀତ ଚାପ କିଏ?

(iii) $\angle C$ର ପରିମାଣ କେଉଁ କେନ୍ଦ୍ରସ୍ଥ କୋଣ ପରିମାଣର ଅର୍ଦ୍ଧେକ?

(iv) $\overset{\frown}{BEA}$ ଓ $\overset{\frown}{BFC}$ ଚାପଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେଲେ ΔABC ସମ୍ପର୍କରେ କେଉଁ ଧାରଣା ମିଳୁଛି?

(v) $\overset{\frown}{BFC}$ ଉପରେ ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ନିଅ ଯେପରିକି $m\angle BPA = m\angle C$। ଏହିପରି କେତୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଅଛି? $\overset{\frown}{ADC}$ ଉପରେ ଏପରି ବିନ୍ଦୁ ଅଛି କି? $\overset{\frown}{BEA}$ ଉପରେ ଏପରି ବିନ୍ଦୁ ଅଛି କି?



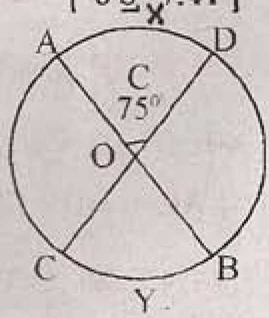
[ଚିତ୍ର 7.41]

4. ଚିତ୍ର 7.41ରେ ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଯାହାର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି। $m\overset{\frown}{AEB} = 110^{0}$ ହେଲେ

(i) ସମସ୍ତ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(ii) $m\overset{\frown}{AHD}$, $m\overset{\frown}{CGD}$ ଓ $m\overset{\frown}{CFB}$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(iii) ABCD କେଉଁ ପ୍ରକାର ଚତୁର୍ଭୁଜ?



[ଚିତ୍ର 7.42]

5. ଚିତ୍ର 7.42 ରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଜ୍ୟାଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର।

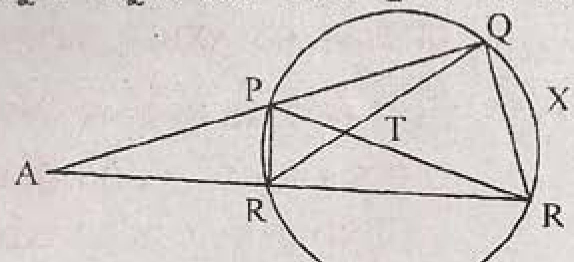
(i) $m\overset{\frown}{AXD} = 75^{0}$ ହେଲେ $m\angle ODB$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(ii) $m\angle OCA$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(iii) $\overleftrightarrow{AC}$ ଓ $\overleftrightarrow{BD}$ ମଧ୍ୟରେ କେଉଁ ସମ୍ପର୍କ ରହିଅଛି?

6. ΔABC ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ। $\angle A$ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ବୃତ୍ତକୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ। ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ΔBDC ସମଦ୍ୱିବାହୁ।

7. ଚିତ୍ର 7.43ରେ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ A ଠାରୁ $\overrightarrow{AP}$ ଓ $\overrightarrow{AR}$ ରଶ୍ମିଦ୍ୱୟ ବୃତ୍ତକୁ ଯଥାକ୍ରମେ P, Q ଏବଂ R, S ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ଯେପରି A-P-Q ଏବଂ A-R-S।



[ଚିତ୍ର 7.43]

(a) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\Delta APR \sim \Delta AQS$ ।

(b) ଯଦି $\overline{PS}$ ଓ $\overline{RQ}$ ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ T ହୁଏ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $PT \cdot TS = RT \cdot TQ$।

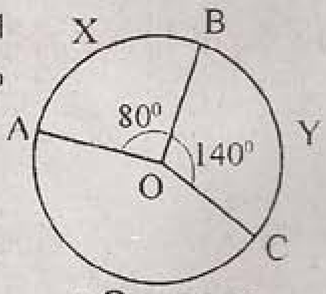
8. ପ୍ରଶ୍ନ 7ର ଚିତ୍ର 7.43ରେ $m\angle A = 15^0$, $m\overset{\frown}{QXS} = 50^0$ ହେଲେ $m\angle PTR$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

9. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ଉପରେ ଚାରିଟି ବିନ୍ଦୁ A, B, C, D କିପରି ଚିହ୍ନିତ କରିବା ଯେପରି ABCD ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର ହେବ ?

ଛଅଟି ବିନ୍ଦୁ A, B, C, D, E, F କିପରି ଚିହ୍ନିତ କରିବା ଯେପରି ABCDEF ଏକ ସୁଷମ ଷଡ଼ଭୁଜ ହେବ ?

ଆଠଟି ବିନ୍ଦୁ $A_1, A_2, \ldots\ldots A_8$ କିପରି ଚିହ୍ନିତ କରିବା ଯେପରି $A_1, A_2, \ldots\ldots A_8$ ସୁଷମ ଅଷ୍ଟଭୁଜ ହେବ।

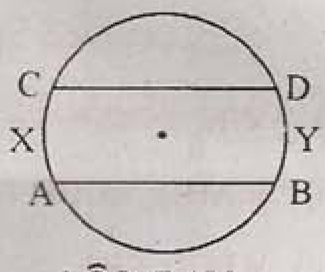
10. ଏକ ବୃତ୍ତରେ $\overset{\frown}{AXB}$ ଓ $\overset{\frown}{BYC}$ର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ ଯଥାକ୍ରମେ 80^0 ଓ 140^0 ହେଲେ $m\angle ABC$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।



[ଚିତ୍ର 7.44]

11. ଚିତ୍ର 7.45ରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଦୁଇଟି ସମାନ୍ତର ଜ୍ୟା। ପ୍ରମାଣ କର ଯେ –

(i) $m\overset{\frown}{AXC} = m\overset{\frown}{BYD}$ ଏବଂ (ii) $AC = BD$



[ଚିତ୍ର 7.45]

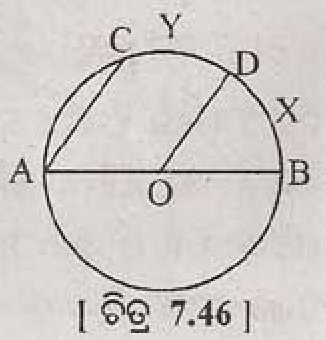
12. ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ $AC = BD$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $AD = BC$।

13. ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ। $AD = BC$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,
(i) $AC = BD$ ଏବଂ (ii) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ।

14. (i) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର $\overset{\frown}{AXB}$ ଏକ ଚାପ। ପ୍ରମାଣ କରଯେ $\overset{\frown}{AXB}$ ର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଗୋଟିଏ ଏବଂ କେବଳ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ C ଅଛି ଯେପରି $\overset{\frown}{AC}$ ଓ $\overset{\frown}{CB}$ ଚାପଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେବ। [C ବିନ୍ଦୁକୁ $\overset{\frown}{AXB}$ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ କୁହାଯାଏ। ସୂଚନା : $\angle AOB$ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ରେଖା $\overset{\frown}{AXB}$କୁ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକଲେ C ଆବଶ୍ୟକ ବିନ୍ଦୁ ହେବ]

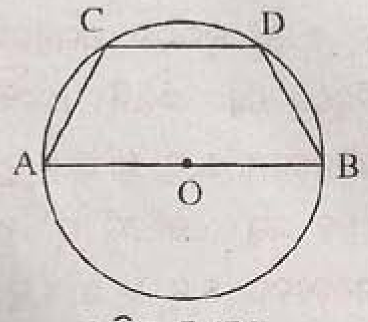
(ii) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overset{\frown}{AXB}$ରେ ଅସଂଖ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ ରହିଅଛି।

15. ଚିତ୍ର 7.46ରେ AB ବୃତ୍ତର ଏକ ବ୍ୟାସ ଏବଂ O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର $\overline{AC} \parallel \overline{OD}$ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overset{\frown}{BXD}$ ଓ $\overset{\frown}{DYC}$ ସର୍ବସମ ଅର୍ଥାତ୍ D, $\overset{\frown}{BDC}$ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ।



[ଚିତ୍ର 7.46]

'ଗ' - ବିଭାଗ



[ଚିତ୍ର 7.47]

16 ଚିତ୍ର 7.47 ରେ $\overline{CD}$ ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ବ୍ୟାସ ସହ ସମାନ୍ତର ଏବଂ CD = OB। ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $m\angle BDC = 2m\angle OBD$।

17. ABCD ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜର $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ P ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି। O ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଏବଂ B ଓ C $\overleftrightarrow{OP}$ ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ। ଯଦି AC = BD ହୁଏ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ (i) AB = CD, (ii) PA = PD ଏବଂ (iii) $\overline{BC} \parallel \overline{BD}$ ।

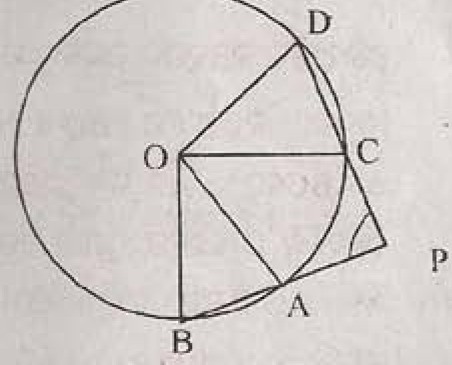
18. ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ବର୍ଗଚିତ୍ର। P, $\overline{AB}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ। ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overline{DP}$ ଓ $\overline{CP}$, $\angle APB$କୁ ସମତ୍ରିଖଣ୍ଡିତ କରନ୍ତି।

19. (i) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ଏକ ସ୍ଥୂଳକୋଣ।

(ii) ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ବୃହତ୍ ଚାପର ଅନ୍ତର୍ଲିଖିତ କୋଣ ଏକ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ।

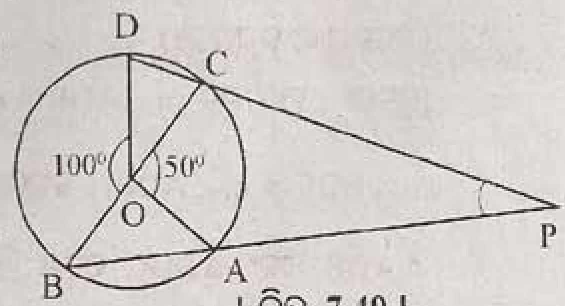
20. ΔABCର ପରିବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ତ୍ରିଭୁଜଟିର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $m\angle BAC + m\angle OBC = 90^0$।

21 ଏକ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ଅସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ଟି ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ହେବ।



| ଚିତ୍ର 7.48 |

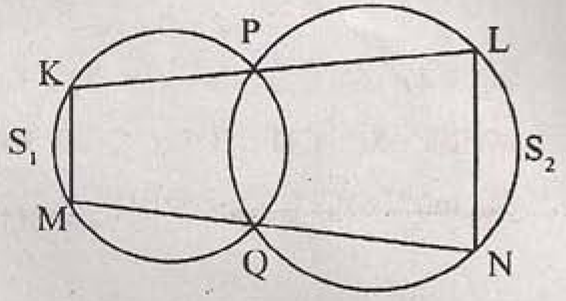
22. ଚିତ୍ର 7.48ରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଜ୍ୟାଦ୍ୱୟ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ P ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି, ଯେପରି P-C-D ଏବଂ P-A-B।
$m\angle BOD = 100^0$, $m\angle AOC = 50^0$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $m\angle APC = 105^0$।
[ସୂଚନା : ΔOAB ଓ ΔOCD ସମଦ୍ୱିବାହୁ ଅଟନ୍ତି]



| ଚିତ୍ର 7.49 |

23. ଚିତ୍ର 7.49ରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ଜ୍ୟାଦ୍ୱୟ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ P ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି। ଯେପରି P-A-B ଏବଂ P-C-D।
$m\angle BOD = 100^0$ ଏବଂ $m\angle AOC = 50^0$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $m\angle APC = 25^0$।

24. S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । P ମଧ୍ୟଦେଇ ଏକ ସରଳରେଖା S_1କୁ K ଓ S_2କୁ L ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ । ସେହିପରି Q ମଧ୍ୟଦେଇ ଏକ ସରଳରେଖା S_1କୁ M ଓ S_2କୁ N ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ । [ଚିତ୍ର 7.50] ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\overline{KM} \parallel \overline{LN}$ ।



[ଚିତ୍ର 7.50]

25. ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ । $\angle B$ ଓ $\angle D$ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ E ଠାରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । $\overrightarrow{DE}$ ବୃତ୍ତକୁ F ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overline{BE} \perp \overline{BF}$ ।

26. ΔABCର କୋଣମାନଙ୍କର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକମାନେ ତ୍ରିଭୁଜର ପରିବୃତ୍ତକୁ X, Y ଓ Z ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରନ୍ତି । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ΔXYZ ର କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣ $90^0 - \frac{1}{2}m\angle A$, $90^0 - \frac{1}{2}m\angle B$ ଓ $90^0 - \frac{1}{2}m\angle C$ ।

27. ΔABC ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ । $\overline{BC}$ ଜ୍ୟା ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ କ୍ଷୁଦ୍ରଚାପ ଉପରେ P ଏକ ବିନ୍ଦୁ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $PA = PB + PC$ ।

[ସୂଚନା : $\overrightarrow{BP}$ ଉପରେ D ନିଅ ଯେପରି $PC = PD$ ହେବ । ΔBCD ଓ ΔACP ର ତୁଳନା କର ।]

28. ΔABCରେ $\angle A$ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ΔABCର ପରିବୃତ୍ତକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । P ବିନ୍ଦୁରୁ $\overleftrightarrow{AB}$ ଓ $\overleftrightarrow{AC}$ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟର ପାଦବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ Q ଏବଂ R । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $AQ = \frac{AB+AC}{2} = AR$ ।

[ସୂଚନା : ଦର୍ଶାଅ ଯେ PBQ ଓ PCR ଦୁହେଁ ସର୍ବସମ $\Rightarrow BQ = CR$]

29. ΔABCରେ $\angle A$ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ΔABCର ପରିବୃତ୍ତକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ । $\overline{AP}$ ଓ $\overline{BC}$ ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ D ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ΔABD ଏବଂ ΔAPC ସଦୃଶ ଅଟନ୍ତି । ସୁତରାଂ ଦର୍ଶାଅ ଯେ $AB \cdot AC = BD \cdot DC + AD^2$ ।

[ସୂଚନା : ΔABD ଓ ΔAPC ସଦୃଶ $\Rightarrow AB \cdot AC = AD \cdot AP$ । $AD^2 = AD\,(AP-PD)$]

30. ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ । (ଟଲେମୀଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ)

[ସୂଚନା : ମନେକର $m\angle ADB > m\angle BDC$ । E, $\overline{AC}$ ଉପରେ ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେଉ ଯେପରି $m\angle BDC = m\angle ADE$ । ବର୍ତ୍ତମାନ ΔADE ଏବଂ ΔBDC ସଦୃଶ $\Rightarrow \frac{AE}{BC} = \frac{AD}{BD}$ । ପୁନଶ୍ଚ ΔADB ଏବଂ ΔEDC ସଦୃଶ $\Rightarrow \frac{CD}{BD} = \frac{EC}{AB}$]

●●●